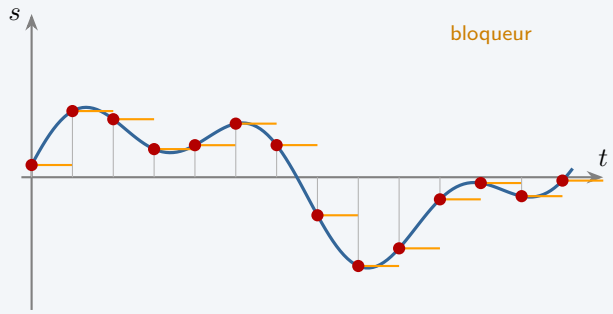
LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

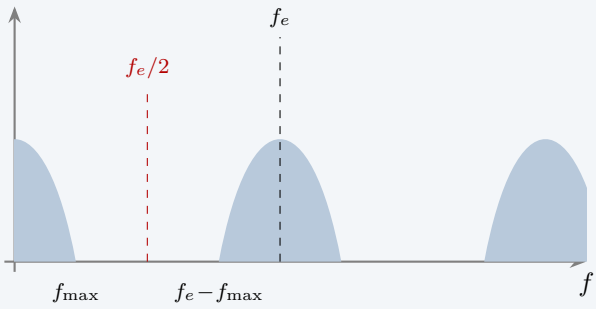
Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

E3 ÉLECTRONIQUE

Électronique numérique

Signal analogique et signal numérique — Échantillonnage, quantification, codage — Spectre d'un signal échantillonné — Condition de Nyquist-Shannon, repliement — Analyse spectrale numérique — Filtrage numérique — CAN et CNA, restitution





> *Si une fonction ne contient aucune fréquence supérieure à W, elle est entièrement déterminée par la donnée de ses valeurs en une suite de points espacés de $1/(2W)$ seconde.*
>
> — Claude E. Shannon, « Communication in the Presence of Noise », *Proceedings of the IRE* (1949)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Échantillonnage et repliement »

E3 — Électronique numérique

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Distinguer signal analogique et signal numérique ; décrire la chaîne de traitement numérique (filtre anti-repliement, échantillonneur-bloqueur, CAN, calculateur, CNA, filtre de lissage).
- Décrire et justifier la structure du spectre d'un signal échantillonné (raies $|kf_e \pm f|$) ; énoncer et utiliser la condition de Nyquist-Shannon ; prévoir la fréquence apparente en cas de repliement.
- Choisir les paramètres d'une acquisition (fréquence d'échantillonnage, durée, nombre d'échantillons) en vue d'une analyse spectrale ; relier résolution spectrale et durée d'acquisition.
- Calculer un pas de quantification, une erreur de quantification, la taille d'un fichier numérique ; exploiter un CNA à résistances pondérées.
- Établir l'algorithme d'un filtre numérique passe-bas du premier ordre par la méthode d'Euler ; discuter sa stabilité et sa fidélité au filtre analogique ; le programmer (activité numérique exigible).
- Expliquer la restitution d'un signal analogique par un CNA suivi d'un filtre de lissage.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Échantillonnage et repliement » permet de faire varier la fréquence d'un signal et la fréquence d'échantillonnage, et d'observer simultanément les échantillons, le signal reconstruit et le spectre périodisé : le repliement y devient évident.
Cette partie est d'abord **expérimentale** (TP avec carte d'acquisition et oscilloscope numérique) ; le cours en fournit les outils d'interprétation. Prérequis : **E1** (spectre), **E2** (filtrage). Des **exercices d'application corrigés** suivent chaque notion ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours terminent le chapitre.

Table des matières

Introduction . . . 4
I Du signal analogique au signal numérique . . . 4
I.1 Définitions, intérêt . . . 4
I.2 Chaîne de traitement numérique . . . 4
II Échantillonnage . . . 5
II.1 Premières observations . . . 5
II.2 Spectre d'un signal échantillonné . . . 5
II.3 Condition de Nyquist-Shannon, repliement de spectre . . . 6
III Analyse spectrale numérique . . . 8
III.1 Durée d'acquisition et résolution spectrale . . . 8
IV Quantification, codage et conversions . . . 9
IV.1 Quantification . . . 9
IV.2 Conversion numérique-analogique et restitution . . . 10
V Filtrage numérique . . . 11
V.1 Principe . . . 11
V.2 Passe-bas numérique du premier ordre . . . 11
V.3 Moyenne glissante ; numérique ou analogique ? . . . 12
V.4 Activité numérique : simuler un filtrage numérique . . . 12
VI Synthèse . . . 13
VII Exercices d'approfondissement . . . 14

VIII Classiques des concours 15

Introduction

Les capteurs délivrent des signaux **analogiques**, mais ce sont des calculateurs qui les stockent, les analysent, les filtrent et les transmettent. Il faut donc transformer un signal continu en une suite finie de nombres, sans perdre l'information utile, puis éventuellement revenir à un signal analogique (haut-parleur, commande d'un moteur). Ce chapitre étudie les deux pertes possibles lors de la numérisation : la perte liée à l'**échantillonnage** (prélever un nombre fini de valeurs dans le temps), maîtrisée par la condition de Nyquist-Shannon, et celle liée à la **quantification** (arrondir chaque valeur). Il montre enfin comment remplacer un filtre analogique par un **algorithme**.

I Du signal analogique au signal numérique

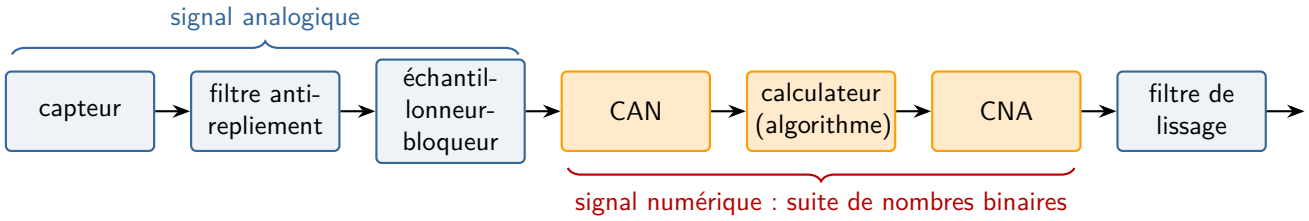
I.1 Définitions, intérêt

Définition — Signal analogique, signal numérique R

Un signal **analogique** $s(t)$ est défini à tout instant et peut prendre un continuum de valeurs. Un signal **numérique** est une suite finie de nombres (s_k) : il est **discret en temps** (valeurs relevées aux instants $t_k = kT_e$) et **discret en valeurs** (chaque valeur est un multiple entier d'un quantum, codé sur un nombre fini de bits).

Numériser un signal permet de le **stocker** sans dégradation, de le **traiter** par programme (filtrage, analyse spectrale, compression) et de le **transmettre** de façon robuste : un signal à paliers reste lisible malgré le bruit (passage de la télévision analogique à la TNT). En contrepartie, la numérisation doit être conduite avec soin pour ne pas perdre ni fausser l'information.

I.2 Chaîne de traitement numérique



Définition — Les trois opérations de la numérisation R

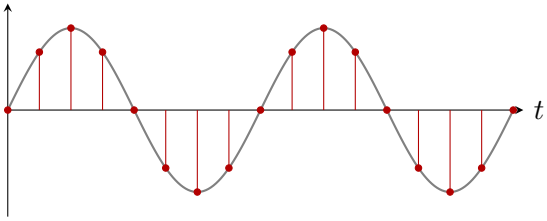
1. **Échantillonnage** : on relève $s(t)$ aux instants $t_k = kT_e$; T_e est la **période d'échantillonnage**, $f_e = 1/T_e$ la **fréquence d'échantillonnage**. L'**échantillonneur-bloqueur** maintient la valeur constante pendant la durée de la conversion.
2. **Quantification** : chaque échantillon est remplacé par le multiple le plus proche (ou immédiatement inférieur) du **pas de quantification** q.
3. **Codage** : la valeur quantifiée est écrite en binaire sur N bits.

Le **convertisseur analogique-numérique** (CAN) réalise la quantification et le codage ; le **convertisseur numérique-analogique** (CNA) réalise l'opération inverse.

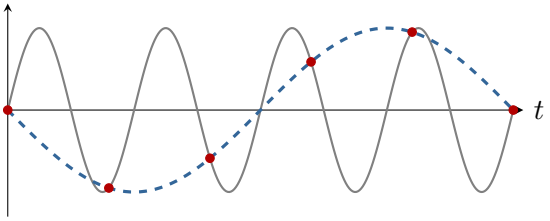
II Échantillonnage

II.1 Premières observations

$f_e = 8f$: échantillonnage fidèle



$f_e = 1{,}25f$: repliement



À gauche, les échantillons décrivent bien la sinusoïde. À droite ($f = 4$, $f_e = 5$ en unités arbitraires), ils coïncident aussi avec une sinusoïde de fréquence $f_e - f = 1$ (tirets) : rien ne permet de les distinguer.

Ambiguïté de l'échantillonnage R

Deux sinusoïdes dont les fréquences diffèrent d'un multiple de f_e, ou dont la somme est un multiple de f_e, donnent les **mêmes échantillons** (au signe près de la phase). Plusieurs signaux analogiques différents peuvent donc produire le même signal échantillonné.

Démonstration D. Aux instants $t_k = kT_e$, avec p entier :

$$\cos\big(2\pi(f + pf_e)kT_e + \varphi\big) = \cos(2\pi fkT_e + \varphi + 2\pi pk) = \cos(2\pi fkT_e + \varphi),$$

$$\cos\big(2\pi(pf_e - f)kT_e - \varphi\big) = \cos(2\pi pk - 2\pi fkT_e - \varphi) = \cos(2\pi fkT_e + \varphi).$$

II.2 Spectre d'un signal échantillonné

Modélisation. Un échantillonneur peut être réalisé (et modélisé) par un **multiplieur** (**E4**) recevant le signal $s(t)$ et un train d'impulsions étroites $p(t)$, de période T_e, de durée $\tau \ll T_e$ et de hauteur 1 : $s_e(t) = s(t)\,p(t)$ vaut $s(kT_e)$ pendant les impulsions et 0 entre elles.

Spectre du signal échantillonné R D

Une composante sinusoïdale de fréquence f donne, après échantillonnage à la fréquence f_e, des raies aux fréquences

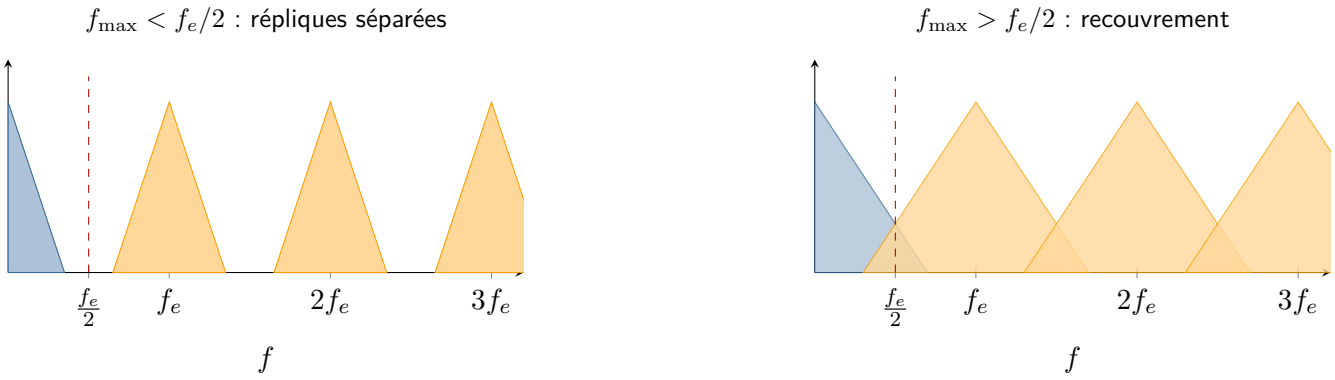
$$f, \qquad kf_e - f, \qquad kf_e + f \qquad (k \in \mathbb{N}^*)$$

Le spectre du signal échantillonné est le spectre du signal analogique **répliqué autour de chaque multiple de** f_e (et symétrisé) : il est périodique de période f_e.

Démonstration. D'après **E1** (impulsions rectangulaires), $p(t) = \alpha + \sum_{k\geq 1} P_k \cos(2\pi k f_e t)$, avec $\alpha = \tau/T_e$ et $P_k \approx 2\alpha$ tant que $k\tau \ll T_e$. Pour $s = S\cos(2\pi ft)$:

$$s_e(t) = \alpha S\cos(2\pi ft) + \sum_{k\geq 1} \frac{P_k S}{2}\Big[\cos\big(2\pi(kf_e + f)t\big) + \cos\big(2\pi(kf_e - f)t\big)\Big].$$

Le produit de deux cosinus fait apparaître les fréquences somme et différence. Par linéarité de l'échantillonnage, chaque raie d'un signal quelconque est répliquée de la même façon.



Spectre d'un signal de bande $[0, f_{\max}]$ (bleu) et ses répliques (orange). À droite, la réplique centrée sur f_e déborde dans la bande utile : c'est le repliement.

II.3 Condition de Nyquist-Shannon, repliement de spectre

Théorème de Nyquist-Shannon R

Un signal dont le spectre est borné par $f_{\max}$ est entièrement représenté par ses échantillons (et peut être reconstruit) si et seulement si

$$f_e > 2f_{\max}$$

La fréquence $f_e/2$ est la **fréquence de Nyquist**. Si la condition n'est pas respectée, il y a **repliement de spectre** (*aliasing*) : des répliques tombent dans la bande $[0, f_e/2]$ et s'y superposent au spectre utile, de façon **irréversible**.

Justification. La raie la plus haute du spectre, $f_{\max}$, a pour réplique la plus proche $f_e - f_{\max}$. Il n'y a pas de recouvrement si $f_{\max} < f_e - f_{\max}$.

☞ Méthode — Prévoir la fréquence apparente M

Un analyseur numérique n'affiche que la bande $[0, f_e/2]$. Une composante de fréquence f y apparaît à la fréquence

$$f_{\text{app}} = |f - k f_e|, \qquad k \text{ entier le plus proche de } f/f_e$$

Exemple : $f = 900\,\text{Hz}$, $f_e = 1\,\text{kHz}$: $f_{\text{app}} = 100\,\text{Hz}$. C'est l'effet **stroboscopique** : une roue filmée à $25\,\text{images/s}$ qui tourne à $24\,\text{tr/s}$ semble tourner lentement à l'envers ($-1\,\text{tr/s}$).

Définition — Filtre anti-repliement

Un signal réel contient toujours des composantes de haute fréquence (bruit, harmoniques) sans intérêt. Pour éviter qu'elles ne se replient dans la bande utile, on place **avant l'échantillonneur** un filtre passe-bas analogique dont la fréquence de coupure est inférieure à $f_e/2$ (et dont l'atténuation est suffisante à $f_e/2$). On perd volontairement les hautes fréquences, mais on n'introduit pas de fréquences fausses.

Ordres de grandeur

Téléphonie numérique	bande $300\,\text{Hz}$–$3{,}4\,\text{kHz}$, $f_e = 8\,\text{kHz}$
CD audio	audible jusqu'à $20\,\text{kHz}$, $f_e = 44{,}1\,\text{kHz}$, 16 bits
Carte d'acquisition de TP	f_e jusqu'à quelques centaines de kHz, 12 bits
Oscilloscope numérique	f_e de l'ordre de $1\,\text{GS/s}$ (milliard d'échantillons par seconde)

✗ Attention, erreurs fréquentes

- La condition $f_e > f_{\max}$ ne suffit pas : il faut $f_e > 2f_{\max}$, et en pratique f_e de 5 à 10 fois $f_{\max}$ pour que les échantillons « ressemblent » au signal à l'écran.
- $f_{\max}$ est la plus haute fréquence **présente** dans le signal (harmoniques et bruit compris), pas la fréquence du fondamental.
- Sur un oscilloscope numérique, une base de temps trop lente diminue f_e (la mémoire contient un nombre fixe de points) et peut faire apparaître une fausse sinusoïde lente.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 Fréquences apparentes

✦✧✧✧✧

Quelle fréquence affiche un analyseur numérique ($[0, f_e/2]$) dans les cas suivants ?

Q-1) $f = 2{,}3\,\text{kHz}$, $f_e = 1{,}0\,\text{kHz}$.

Q-2) $f = 9{,}5\,\text{kHz}$, $f_e = 10\,\text{kHz}$.

Q-3) $f = 6\,\text{kHz}$, $f_e = 20\,\text{kHz}$.

Q-4) Un ventilateur à une pale tourne à $24{,}8\,\text{tr/s}$; on le filme à $25\,\text{images/s}$. Que voit-on ?

Correction

Q-1) $f/f_e = 2{,}3$, $k = 2$: $f_{\text{app}} = 300\,\text{Hz}$.

Q-2) $k = 1$: $500\,\text{Hz}$.

Q-3) Pas de repliement ($6 < 10$) : $6\,\text{kHz}$.

Q-4) $f_{\text{app}} = |24{,}8 - 25| = 0{,}2\,\text{tr/s}$; comme $f < f_e$, la pale semble reculer : rotation apparente lente en sens inverse, un tour en $5\,\text{s}$.

EXERCICE 2 Échantillonner un carré

✦✦✧✧✧

Un carré de fréquence $f_0 = 2\,\text{kHz}$, réduit à ses premières raies (rangs 1, 3, 5, 7 d'amplitudes A, $A/3$, $A/5$, $A/7$), est échantillonné à $f_e = 15\,\text{kHz}$.

Q-1) La condition de Nyquist-Shannon est-elle respectée ?

Q-2) Donner les fréquences et amplitudes des raies du signal échantillonné comprises entre 0 et $f_e/2$.

Q-3) Quel filtre aurait-il fallu placer avant l'échantillonneur ? Quel signal aurait-on alors numérisé ?

Correction

Q-1) $f_{\max} = 14\,\text{kHz}$: il faudrait $f_e > 28\,\text{kHz}$. Non.

Q-2) Raies directes dans $[0; 7{,}5]$ kHz : $2\,\text{kHz}$ (A), $6\,\text{kHz}$ ($A/3$). Repliées : $15 - 10 = 5\,\text{kHz}$ ($A/5$) et $15 - 14 = 1\,\text{kHz}$ ($A/7$). Le spectre affiché contient des raies à 1 et $5\,\text{kHz}$ qui n'existent pas dans le signal : il n'est plus celui d'un carré de $2\,\text{kHz}$.

Q-3) Un passe-bas de coupure inférieure à $7{,}5\,\text{kHz}$, éliminant les rangs 5 et 7 : on aurait numérisé fidèlement la somme des rangs 1 et 3, carré « arrondi », sans fréquence fausse.

III Analyse spectrale numérique

III.1 Durée d'acquisition et résolution spectrale

Une acquisition comporte N échantillons pris pendant la durée $T_a = NT_e$. L'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT) en calcule un spectre **discret**, défini aux seules fréquences multiples de $1/T_a$.

Paramètres d'une analyse spectrale R

$$N = f_e T_a \qquad \Delta f = \frac{1}{T_a} = \frac{f_e}{N} \qquad \text{bande analysable : } \left[0, \frac{f_e}{2}\right]$$

- la **fréquence d'échantillonnage** fixe la plus haute fréquence analysable, $f_e/2$;
- la **durée d'acquisition** fixe la **résolution spectrale** Δf : deux raies plus proches que Δf ne sont pas séparées ;
- le **nombre d'échantillons** relie les deux ; il est limité par la mémoire : on ne peut améliorer à la fois la bande et la résolution qu'en augmentant N.

☞ Méthode — Choisir les paramètres d'une acquisition M

1. Repérer $f_{\max}$ (plus haute fréquence significative) et choisir $f_e > 2f_{\max}$ (avec marge), sinon filtrer avant l'acquisition.
2. Choisir T_a pour obtenir la résolution voulue, $T_a \geq 1/\Delta f$, et contenant de préférence un **nombre entier de périodes** du signal.
3. En déduire $N = f_e T_a$ et vérifier qu'il est compatible avec l'appareil ; sinon, trouver un compromis.
4. Régler le calibre juste au-dessus de la valeur maximale du signal (§IV).

Remarque

Fuite spectrale (hors programme). Si la durée d'acquisition ne contient pas un nombre entier de périodes, une raie du signal tombe entre deux fréquences calculées : elle apparaît « étalée » en plusieurs pics voisins espacés de Δf. On l'atténue en choisissant $T_a = pT$, en allongeant T_a, ou en appliquant une **fenêtre** (Hann, Hamming…) proposée par l'oscilloscope.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 3 Dimensionner une acquisition ✦✦✧✧✧

Q-1) On veut analyser un signal dont les raies utiles s'étendent jusqu'à $8\,\text{kHz}$ avec une résolution de $5\,\text{Hz}$. Proposer f_e, T_a et N.

Q-2) Une carte échantillonne à $50\,\text{kHz}$ pendant $2\,\text{ms}$. Combien d'échantillons enregistre-t-elle ? Quelles fréquences contient le spectre calculé ? Lesquelles sont exploitables ?

Correction

Q-1) $f_e > 16\,\text{kHz}$; avec une marge, $f_e = 40\,\text{kHz}$. $T_a = 1/\Delta f = 0{,}2\,\text{s}$. $N = f_e T_a = 8000$ échantillons. Prévoir un filtre anti-repliement coupant au-delà de $8\,\text{kHz}$.

Q-2) $N = 50 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-3} = 100$. Résolution $\Delta f = 500\,\text{Hz}$: fréquences 0 ; $0{,}5$; 1 ; … ; $49{,}5\,\text{kHz}$ (100 valeurs, autant que d'échantillons). Seule la moitié inférieure, jusqu'à $25\,\text{kHz}$, est exploitable : l'autre moitié en est l'image symétrique.

EXERCICE 4 — Le piège de l'oscilloscope numérique ✦✦✧✧✧

Un oscilloscope enregistre 2500 points par écran de 10 divisions.

Q-1) Quelle est sa fréquence d'échantillonnage pour une base de temps de $1\,\mathrm{ms/div}$?

Q-2) On observe avec ce réglage une sinusoïde de $1{,}01\,\mathrm{MHz}$. Qu'affiche l'écran ?

Q-3) Comment s'apercevoir du problème ?

Correction

Q-1) $T_a = 10\,\mathrm{ms}$, donc $f_e = 2500/10\,\mathrm{ms} = 250\,\mathrm{kHz}$.

Q-2) $f/f_e = 4{,}04$, $k = 4$: $f_{\text{app}} = |1010 - 1000| = 10\,\mathrm{kHz}$. L'écran montre une belle sinusoïde de $10\,\mathrm{kHz}$, totalement fausse. (Pour $f = 1{,}00\,\mathrm{MHz}$, on verrait même une tension constante !)

Q-3) En changeant la base de temps : la fréquence affichée d'une vraie sinusoïde ne change pas, celle d'un signal replié varie de façon incohérente. Il faut toujours commencer par une base de temps rapide.

IV Quantification, codage et conversions

IV.1 Quantification

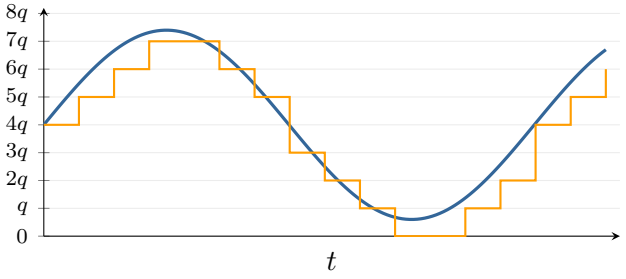
Définition — Pas de quantification, résolution R

Un CAN de N bits dispose de 2^N valeurs pour couvrir sa **plage de conversion** (pleine échelle) ΔU (par exemple $[0, U_{\max}]$ ou $[-C, C]$ pour un calibre C). Le **pas** (ou quantum) de quantification est

$$q = \frac{\Delta U}{2^N} \qquad \text{(certains constructeurs prennent } \Delta U/(2^N - 1)\text{)}$$

L'erreur de quantification est au plus $q/2$ (arrondi au plus proche) ou q (troncature). Un signal qui dépasse la plage est **écrêté** (saturation).

Exemple. Un signal compris entre 0 et $6{,}4\,\mathrm{V}$ est quantifié sur 3 bits par troncature : $q = 6{,}4/8 = 0{,}8\,\mathrm{V}$. Les intervalles $[0;0{,}8[$, $[0{,}8;1{,}6[$, … reçoivent les codes 000, 001, …, 111. Une tension de $3{,}1\,\mathrm{V}$ $(3{,}1/0{,}8 = 3{,}9)$ reçoit le code 011 et sera restituée comme $3q = 2{,}4\,\mathrm{V}$: l'erreur atteint $0{,}7\,\mathrm{V}$. Avec 12 bits, $q = 1{,}6\,\mathrm{mV}$.



Signal analogique (bleu) et signal quantifié par troncature sur 3 bits, échantillonné et bloqué (orange).

Ordres de grandeur

CAN 8 bits sur $5\,\mathrm{V}$: $q \approx 20\,\mathrm{mV}$; carte 12 bits sur $\pm 10\,\mathrm{V}$: $q = 4{,}9\,\mathrm{mV}$; CD 16 bits : $65\,536$ niveaux ; studio : 24 bits. Taille d'un enregistrement de durée Δt : $N\, f_e\, \Delta t$ bits par voie (1 octet $= 8$ bits).

Remarque

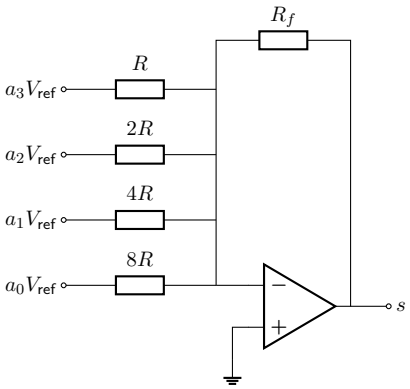
Ne pas confondre la **résolution en tension** (le pas q, lié au nombre de bits et au calibre) et la **résolution spectrale** $\Delta f = 1/T_a$ (liée à la durée d'acquisition) : le mot est le même, les notions sont indépendantes.

IV.2 Conversion numérique-analogique et restitution

CNA à résistances pondérées. Chaque bit $a_i \in \{0,1\}$ du code commande un interrupteur qui applique $a_i V_{\text{ref}}$ à une résistance de valeur R, $2R$, $4R$ ou $8R$. L'ALI, monté en sommateur inverseur ($R_f = R/2$), réalise (loi des nœuds en $V^- = 0$) :

$$s = -R_f V_{\text{ref}} \left(\frac{a_3}{R} + \frac{a_2}{2R} + \frac{a_1}{4R} + \frac{a_0}{8R} \right) = -\frac{V_{\text{ref}}}{16}\,\mathcal{C}$$

où $\mathcal{C} = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0$ est l'entier codé. La sortie est proportionnelle au code, avec le pas $q = V_{\text{ref}}/16$; un inverseur supprime le signe $-$.



Restitution d'un signal analogique R

Le CNA délivre une tension **en escalier** (bloqueur d'ordre 0) : son spectre contient le spectre utile et ses répliques autour de f_e, $2f_e$…. Un **filtre passe-bas de lissage**, de fréquence de coupure voisine de $f_e/2$, élimine les répliques et restitue le signal analogique, à condition que Nyquist-Shannon ait été respecté.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 5 — **Quantification et taille de fichier** ✦✦✧✧✧

Q-1) Une carte 12 bits a pour calibre $\pm 10\,\text{V}$. Calculer le pas et l'erreur maximale (arrondi). Quel calibre choisir pour un signal de $\pm 0{,}8\,\text{V}$ si la carte propose ± 1, ± 5 et $\pm 10\,\text{V}$?

Q-2) Calculer la taille d'un morceau stéréo de $3\,\text{min}$, échantillonné à $44{,}1\,\text{kHz}$ sur 16 bits.

Q-3) Pour un CNA 4 bits à résistances pondérées avec $V_{\text{ref}} = 5\,\text{V}$ et $R_f = R/2$, quelle tension correspond au code 1011 ?

Correction

Q-1) $q = \dfrac{20}{4096} = 4{,}9\,\text{mV}$; erreur maximale $q/2 = 2{,}4\,\text{mV}$. Calibre $\pm 1\,\text{V}$: $q = 0{,}49\,\text{mV}$, dix fois plus fin, sans saturation.

Q-2) $3 \times 60 \times 44\,100 \times 16 \times 2 = 2{,}54 \times 10^8$ bits, soit $31{,}8\,\text{Mo}$ (environ $30\,\text{Mio}$) : d'où l'intérêt des formats compressés.

Q-3) $\mathcal{C} = 8 + 0 + 2 + 1 = 11$, $s = -\dfrac{5}{16} \times 11 = -3{,}44\,\text{V}$ ($3{,}44\,\text{V}$ après l'inverseur).

V Filtrage numérique

V.1 Principe

Définition — Filtre numérique R

Un **filtre numérique** est un algorithme qui calcule chaque échantillon de sortie s_k à partir des échantillons d'entrée $e_k, e_{k-1}, \ldots$ et, éventuellement, des sorties précédentes $s_{k-1}, \ldots$ (filtre **récursif**). On l'obtient en discrétisant l'équation différentielle du filtre analogique à imiter : avec $t_k = kT_e$,

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t_k) \approx \frac{s_k - s_{k-1}}{T_e} \quad \text{(Euler implicite)} \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t_k) \approx \frac{s_{k+1} - s_k}{T_e} \quad \text{(Euler explicite)}$$

V.2 Passe-bas numérique du premier ordre

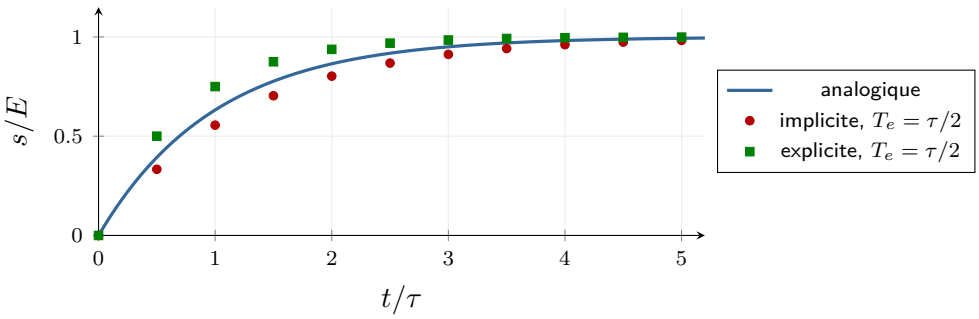
Algorithmes du passe-bas d'ordre 1 R D

Pour le filtre analogique $\tau\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = e$ ($\tau = 1/\omega_c$) :

$$\text{implicite : } s_k = \frac{\tau\, s_{k-1} + T_e\, e_k}{\tau + T_e} \qquad \text{explicite : } s_{k+1} = \left(1 - \frac{T_e}{\tau}\right) s_k + \frac{T_e}{\tau} e_k$$

Le schéma implicite est toujours stable ; le schéma explicite n'est stable que si $T_e < 2\tau$. Dans les deux cas, l'algorithme n'est fidèle au filtre analogique que si $T_e \ll \tau$.

Démonstration. Implicite : $\tau\dfrac{s_k - s_{k-1}}{T_e} + s_k = e_k$ donne $(\tau + T_e)s_k = \tau s_{k-1} + T_e e_k$. Explicite : $\tau\dfrac{s_{k+1} - s_k}{T_e} + s_k = e_k$. Stabilité : à entrée nulle, s_k est une suite géométrique de raison $r = \dfrac{\tau}{\tau + T_e} \in]0, 1[$ (implicite) ou $r = 1 - \dfrac{T_e}{\tau}$ (explicite), qui tend vers 0 si et seulement si $|r| < 1$, soit $0 < T_e < 2\tau$.



Réponse à un échelon : avec $T_e = \tau/2$, les deux schémas encadrent la courbe analogique ; l'accord s'améliore quand T_e/τ diminue.

Fonction de transfert du filtre numérique D

Pour une entrée sinusoïdale échantillonnée $e_k = E\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega kT_e}$, on cherche $s_k = \underline{S}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega kT_e}$. Le schéma implicite

donne

$$\underline{H}_{\text{num}} = \frac{1}{1+\dfrac{\tau}{T_e}\left(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_e}\right)} \xrightarrow[\omega T_e \ll 1]{} \frac{1}{1+\mathrm{j}\omega\tau}$$

- à basse fréquence ($f \ll f_e$), on retrouve le filtre analogique ;
- $\underline{H}_{\text{num}}$ est **périodique en f de période f_e** : le filtre numérique « laisse passer » les fréquences voisines de f_e, $2f_e$… comme celles voisines de 0. C'est la limitation introduite par l'échantillonnage : un filtre numérique ne remplace un filtre analogique qu'en amont d'un bon filtre anti-repliement.

Démonstration. $s_{k-1} = \underline{S}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega kT_e}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_e}$, d'où $\underline{S}\left[(\tau+T_e)-\tau\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_e}\right] = T_e E$. Si $\omega T_e \ll 1$, $1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_e} \approx \mathrm{j}\omega T_e$.

V.3 Moyenne glissante ; numérique ou analogique ?

Le filtre non récursif $s_k = \dfrac{1}{M}\left(e_k + e_{k-1} + \cdots + e_{k-M+1}\right)$ est un passe-bas (moyenne sur la durée MT_e) ; il annule exactement les fréquences pf_e/M (p entier non multiple de M), ce qui permet par exemple d'éliminer une composante à $50\,\mathrm{Hz}$ et ses harmoniques en choisissant $MT_e = 20\,\mathrm{ms}$.

Filtre numérique : avantages	Filtre numérique : limites
programmable (on change un coefficient, pas un composant) ; reproductible, sans dérive en température ni vieillissement ; filtres d'ordre élevé ou adaptatifs faciles à réaliser	bande limitée par $f_e/2$; réponse périodique en fréquence ; bruit de quantification ; temps de calcul ; nécessite CAN, CNA et filtres analogiques d'entrée et de sortie ; inadapté aux fortes puissances

V.4 Activité numérique : simuler un filtrage numérique

Python : passe-bas numérique appliqué à un carré bruité

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

fe, f, E = 20e3, 100, 1.0                  # echantillonnage, signal, amplitude
Te = 1/fe
t = np.arange(0, 0.04, Te)
e = E*np.sign(np.sin(2*np.pi*f*t)) + 0.2*np.random.randn(len(t))   # carre bruite

fc = 300                                   # passe-bas d'ordre 1 (Euler implicite)
tau = 1/(2*np.pi*fc)
s = np.zeros_like(e)
for k in range(1, len(e)):
    s[k] = (tau*s[k-1] + Te*e[k])/(tau + Te)

freq = np.fft.rfftfreq(len(e), Te)         # spectres (amplitudes)
Ef, Sf = 2*abs(np.fft.rfft(e))/len(e), 2*abs(np.fft.rfft(s))/len(s)

fig, (a1, a2) = plt.subplots(2, 1)
a1.plot(t*1e3, e, t*1e3, s); a1.set_xlabel("t (ms)")
a2.plot(freq, Ef, freq, Sf); a2.set_xlim(0, 3000); a2.set_xlabel("f (Hz)")
plt.show()
```

Pistes : diminuer f_e jusqu'à $1\,\mathrm{kHz}$ et comparer au filtre analogique ; programmer le schéma explicite et observer l'instabilité pour $T_e > 2\tau$; programmer une moyenne glissante.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 6 Premiers pas d'un filtre numérique

✦✦✧✧✧

Un passe-bas numérique implicite a $\tau = 4T_e$. L'entrée est un échelon : $e_k = 1$ pour $k \geq 1$, avec $s_0 = 0$.

Q-1) Écrire la relation de récurrence et calculer s_1, s_2, s_3. Comparer à la réponse analogique $1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}$ aux mêmes instants.

Q-2) Même question pour le schéma explicite $s_{k+1} = (1 - T_e/\tau)s_k + (T_e/\tau)e_k$ avec $e_0 = 1$, puis avec $\tau = T_e/3$. Conclure.

Correction

Q-1) $s_k = \dfrac{4s_{k-1} + e_k}{5}$: $s_1 = 0{,}200$; $s_2 = 0{,}360$; $s_3 = 0{,}488$. Analogique : $0{,}221$; $0{,}393$; $0{,}528$. Écart de quelques pourcents, qui diminuerait avec T_e/τ.

Q-2) $s_{k+1} = 0{,}75s_k + 0{,}25$: $s_1 = 0{,}250$; $s_2 = 0{,}438$; $s_3 = 0{,}578$ (par excès). Avec $T_e/\tau = 3$: $s_{k+1} = -2s_k + 3$, d'où 0 ; 3 ; -3 ; 9 ; -15… : divergence oscillante, le schéma explicite est instable pour $T_e > 2\tau$.

EXERCICE 7 Supprimer le 50 Hz par moyenne glissante

✦✦✧✧✧

Un signal lent (fréquences inférieures à $2\,\mathrm{Hz}$) est pollué par le secteur ($50\,\mathrm{Hz}$ et harmoniques). Il est échantillonné à $f_e = 1\,\mathrm{kHz}$.

Q-1) Quelle longueur M de moyenne glissante élimine exactement le $50\,\mathrm{Hz}$ et tous ses harmoniques ?

Q-2) Justifier que le signal utile est peu modifié.

Correction

Q-1) Les zéros sont aux fréquences pf_e/M ; il faut $f_e/M = 50\,\mathrm{Hz}$, soit $M = 20$ (moyenne sur $20\,\mathrm{ms}$, une période du secteur exactement).

Q-2) Une moyenne sur $20\,\mathrm{ms}$ ne modifie presque pas un signal dont la période est supérieure à $0{,}5\,\mathrm{s}$ (il varie peu en $20\,\mathrm{ms}$).

VI Synthèse

★ À retenir

- Numérisation : échantillonnage (T_e, f_e), quantification ($q = \Delta U/2^N$), codage (N bits).
- Spectre échantillonné : chaque raie f est répliquée en $kf_e \pm f$; spectre périodique de période f_e.
- Nyquist-Shannon : $f_e > 2f_{\max}$; sinon repliement, $f_{\text{app}} = |f - kf_e|$; filtre anti-repliement avant l'échantillonneur.
- Analyse spectrale : $N = f_eT_a$, $\Delta f = 1/T_a$, bande $[0, f_e/2]$.
- Filtre numérique : discrétisation de l'équation différentielle ; implicite $s_k = \frac{\tau s_{k-1} + T_e e_k}{\tau + T_e}$; explicite stable si $T_e < 2\tau$; fidèle si $T_e \ll \tau$; réponse périodique en f.
- Restitution : CNA (escalier) + filtre de lissage de coupure $\approx f_e/2$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

Erreurs classiques : croire que $f_e > f$ suffit ; prendre la fréquence du fondamental pour $f_{\max}$; placer le filtre anti-repliement après l'échantillonneur (le repliement est alors déjà fait) ; confondre résolution spectrale et résolution en tension ; oublier que la FFT ne calcule que N fréquences, dont la moitié seulement est utile.

VII Exercices d'approfondissement

EXERCICE 8 Bruit de quantification

★★★☆☆

On quantifie par arrondi, avec le pas q, un signal « assez agité » pour que l'erreur ε soit uniformément répartie sur $[-q/2, q/2]$.

Q-1) Montrer que la valeur efficace de l'erreur vaut $q/\sqrt{12}$.

Q-2) Le signal est une sinusoïde occupant toute la plage d'un CAN de N bits. Montrer que le rapport signal sur bruit vaut $\text{RSB} = \dfrac{3}{2}\,2^{2N}$, soit $\text{RSB}_{\text{dB}} \approx 6{,}0N + 1{,}8$.

Q-3) Application au CD (16 bits) et au téléphone (8 bits).

Correction

Q-1) $\langle \varepsilon^2 \rangle = \dfrac{1}{q}\displaystyle\int_{-q/2}^{q/2} \varepsilon^2 \,\mathrm{d}\varepsilon = \dfrac{q^2}{12}$.

Q-2) Amplitude $A = 2^N q/2$, puissance $A^2/2 = 2^{2N} q^2/8$. $\text{RSB} = \dfrac{2^{2N} q^2/8}{q^2/12} = \dfrac{3}{2}\,2^{2N}$; $10 \log \text{RSB} = 10 \log 1{,}5 + 20N \log 2 = 1{,}76 + 6{,}02N$.

Q-3) CD : $98\,\text{dB}$; téléphone : $50\,\text{dB}$. Chaque bit supplémentaire gagne $6\,\text{dB}$.

EXERCICE 9 Instabilité vue en fréquence

★★★☆☆

Q-1) Montrer que la fonction de transfert du schéma explicite est $\underline{H}_{\text{exp}} = \dfrac{(T_e/\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_e}}{1 - (1 - T_e/\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_e}}$.

Q-2) Calculer $\underline{H}_{\text{exp}}$ à la fréquence de Nyquist $f = f_e/2$. Que se passe-t-il quand $T_e \to 2\tau$? Interpréter.

Q-3) Calculer $|\underline{H}_{\text{num}}|$ (implicite) et $|\underline{H}_{\text{exp}}|$ pour $f = f_e/2$ et $T_e = \tau$. Comparer à la valeur analogique.

Correction

Q-1) Avec $s_k = \underline{S}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega k T_e}$ et $e_k = E\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega k T_e}$: $\underline{S}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e} = (1 - T_e/\tau)\underline{S} + (T_e/\tau)E$, d'où le résultat après multiplication par $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_e}$.

Q-2) $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi} = -1$: $\underline{H}_{\text{exp}} = \dfrac{-T_e/\tau}{2 - T_e/\tau}$, qui diverge quand $T_e \to 2\tau$: le filtre amplifie infiniment la fréquence $f_e/2$, signature de l'instabilité (oscillation alternée $+, -, +$ de la suite).

Q-3) $T_e = \tau$: implicite $\dfrac{1}{1+2} = 0{,}33$; explicite $\dfrac{1}{1} = 1$; analogique $\dfrac{1}{\sqrt{1 + (\pi\tau/T_e)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\pi^2}} = 0{,}30$. Le schéma implicite reste proche, l'explicite ne filtre plus du tout.

EXERCICE 10 Sous-échantillonnage volontaire

Un signal radio occupe la bande $[10{,}0;10{,}1]$ MHz. On l'échantillonne à $f_e = 1\,\text{MHz}$, bien moins que $2f_{\max}$.

Q-1) Où se trouvent les répliques de la bande ? Y a-t-il recouvrement ?

Q-2) Montrer qu'on récupère dans $[0, f_e/2]$ une copie de la bande utile, décalée vers les basses fréquences. Quel filtre faut-il placer avant l'échantillonneur ?

Q-3) Le théorème de Shannon est-il violé ?

Correction

Q-1) Répliques en $|f - kf_e|$: pour $k = 10$, $[0;0{,}1]$ MHz ; $k = 9$ ou 11 : $[0{,}9;1{,}1]$ MHz, etc. Les répliques sont disjointes : pas de recouvrement.

Q-2) La bande $[0;0{,}1]$ MHz est une copie de la bande utile translatée de $10\,\text{MHz}$, exploitable par un calculateur lent. Il faut un **passe-bande** autour de $[10{,}0;10{,}1]$ MHz : toute autre composante (par exemple vers $9{,}95\,\text{MHz}$) se replierait aussi dans $[0;0{,}1]$ MHz.

Q-3) Non : la bonne condition porte sur la **largeur** de la bande ($f_e > 2 \times 0{,}1\,\text{MHz}$ ici) quand la bande est connue ; la forme $f_e > 2f_{\max}$ concerne les signaux dont la bande commence à 0.

VIII Classiques des concours

EXERCICE 11 Numériser un son : pourquoi 44,1 kHz ?

L'oreille perçoit les sons de $20\,\text{Hz}$ à $20\,\text{kHz}$. Le CD échantillonne à $f_e = 44{,}1\,\text{kHz}$ sur 16 bits.

Q-1) Justifier le choix de f_e.

Q-2) Pour éviter tout repliement audible, le filtre anti-repliement doit transmettre $[0, 20\,\text{kHz}]$ sans atténuation notable et atténuer d'au moins $96\,\text{dB}$ toute composante qui se replierait dans la bande audible. À partir de quelle fréquence cette atténuation est-elle exigée ?

Q-3) En assimilant le filtre à son asymptote de pente $-20n$ dB/déc à partir de $20\,\text{kHz}$, estimer l'ordre n nécessaire. Commenter.

Q-4) On **suréchantillonne** à $4f_e = 176{,}4\,\text{kHz}$, puis on réduit numériquement le débit. Quel ordre suffit alors pour le filtre analogique ?

Correction

Q-1) $f_e > 2 \times 20\,\text{kHz} = 40\,\text{kHz}$, avec une marge de $4{,}1\,\text{kHz}$ pour la pente du filtre anti-repliement.

Q-2) Une composante f se replie en $f_e - f$; elle tombe dans la bande audible si $f_e - f < 20\,\text{kHz}$, soit $f > 24{,}1\,\text{kHz}$.

Q-3) $20n\log(24{,}1/20) \geq 96$, avec $\log 1{,}205 = 0{,}081$: $n \geq 59$. Un tel filtre analogique est irréalisable.

Q-4) Les repliements dans la bande audible viennent alors de $f > 176{,}4 - 20 = 156{,}4\,\text{kHz}$: $20n\log(156{,}4/20) \geq 96$ donne $n \geq 5{,}4$, soit un ordre 6, réalisable. Le filtrage raide est ensuite fait numériquement.

EXERCICE 12 Filtre numérique contre filtre analogique

✦✦✦✧✧

On réalise un passe-bas de fréquence de coupure $f_c = 50\,\text{Hz}$ par l'algorithme implicite avec $f_e = 1\,\text{kHz}$.

Q-1) Calculer τ/T_e.

Q-2) Calculer $|\underline{H}_{\text{num}}|$ et la valeur analogique $|\underline{H}|$ à $50\,\text{Hz}$, $400\,\text{Hz}$ et $500\,\text{Hz}$.

Q-3) Que vaut $|\underline{H}_{\text{num}}|$ à $950\,\text{Hz}$? Interpréter et conclure sur le rôle du filtre anti-repliement.

Correction

Q-1) $\tau = \dfrac{1}{2\pi f_c} = 3{,}18\,\text{ms}$, $\tau/T_e = 3{,}18$.

Q-2) On calcule $1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} = (1-\cos\theta) + \mathrm{j}\sin\theta$ avec $\theta = 2\pi f/f_e$. À $50\,\text{Hz}$ ($\theta = 0{,}314$) : $1+3{,}18(0{,}049+0{,}309\mathrm{j}) = 1{,}156+0{,}984\mathrm{j}$, $|\underline{H}_{\text{num}}| = 0{,}66$ (analogique $0{,}71$). À $400\,\text{Hz}$: $|\underline{H}_{\text{num}}| = 0{,}14$ (analogique $0{,}12$). À $500\,\text{Hz}$ ($\theta = \pi$) : $\dfrac{1}{1+2\times 3{,}18} = 0{,}14$ (analogique $0{,}10$).

Q-3) $\theta = 2\pi \times 0{,}95$: $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}$ est le conjugué de sa valeur à $50\,\text{Hz}$, donc $|\underline{H}_{\text{num}}| = 0{,}66$, alors que le filtre analogique donnerait $0{,}05$. Une composante à $950\,\text{Hz}$ est échantillonnée comme une composante à $50\,\text{Hz}$ (repliement) : le filtre numérique ne peut pas la distinguer. Seul un filtre anti-repliement analogique en amont l'élimine.