LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

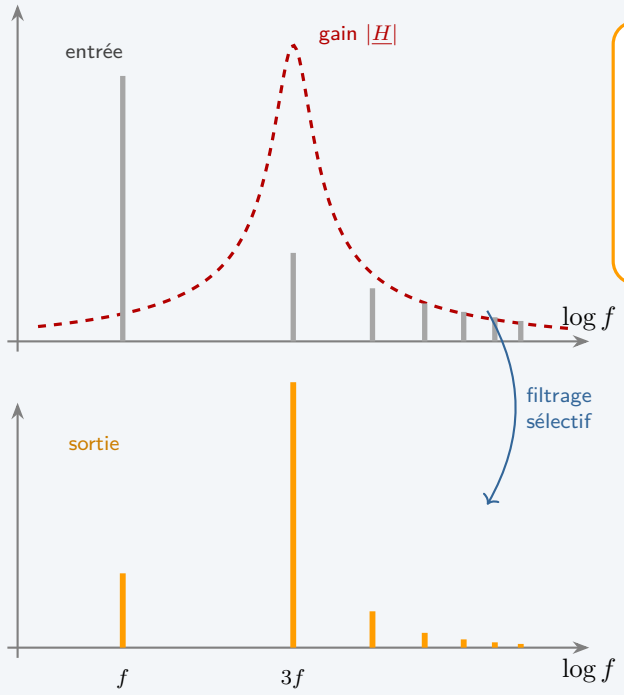
Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

E2

ÉLECTRONIQUE

Effet d'un filtre sur un signal périodique

Linéarité et superposition — Fonction de transfert — Action d'un filtre sur chaque harmonique — Filtres passe-bas, passe-haut, passe-bande — Caractères moyenneur, intégrateur, dérivateur — Signature d'un système non linéaire



> *Le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile ; il l'étudie parce qu'il y prend plaisir, et il y prend plaisir parce qu'elle est belle.*
>
> — Henri Poincaré, *Science et méthode* (1908)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Filtrage d'un signal périodique »

E2 — Filtrage

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Définir un système linéaire, énoncer le principe de superposition et justifier qu'une entrée sinusoïdale donne, en régime établi, une sortie sinusoïdale de même fréquence.
- Passer de l'équation différentielle à la fonction de transfert et inversement ; reconnaître un système stable.
- Prévoir le spectre et la forme du signal de sortie d'un filtre du premier ou du second ordre (passe-bas, passe-haut, passe-bande) attaqué par un signal périodique, en utilisant la fonction de transfert harmonique par harmonique.
- Reconnaître et exploiter quantitativement les caractères moyenneur, intégrateur et dérivateur d'un filtre dans un domaine limité de fréquences.
- Choisir un filtre (nature, ordre, fréquence caractéristique, facteur de qualité) pour extraire ou éliminer une composante d'un signal.
- Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences en sortie.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Filtrage d'un signal périodique » permet de choisir un signal d'entrée (carré, triangle, dents de scie), un filtre et ses paramètres, puis d'observer simultanément les spectres d'entrée et de sortie, le diagramme de Bode et les formes temporelles.
Prérequis : chapitre **E1** (spectre d'un signal périodique) et le filtrage linéaire de MPSI (fonction de transfert, diagramme de Bode). Des **exercices d'application corrigés** suivent chaque notion ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

Introduction . . . 3
I Systèmes linéaires et fonction de transfert . . . 3
I.1 Linéarité et superposition . . . 3
I.2 Réponse à une entrée sinusoïdale, stabilité . . . 3
I.3 Filtres usuels (rappels) . . . 4
II Action d'un filtre sur un signal périodique . . . 6
II.1 Méthode générale . . . 6
II.2 Exemple : carré filtré par un passe-bas du premier ordre . . . 7
II.3 Filtrage sélectif . . . 7
III Caractères moyenneur, intégrateur et dérivateur . . . 8
III.1 Comportement moyenneur . . . 8
III.2 Comportement intégrateur . . . 9
III.3 Comportement dérivateur . . . 9
IV Systèmes non linéaires : apparition de nouvelles fréquences . . . 10
V Activité numérique : filtrer un signal par son spectre . . . 12
VI Synthèse . . . 12
VII Exercices d'approfondissement . . . 13
VIII Classiques des concours . . . 14

Introduction

En première année, on a étudié la réponse d'un filtre à une excitation **sinusoïdale**. Le chapitre **E1** a montré que tout signal périodique est une somme de sinusoïdes. Le pont entre les deux est la **linéarité** : un système linéaire traite chaque composante du spectre indépendamment des autres. Il suffit donc de connaître la fonction de transfert pour prévoir la sortie correspondant à n'importe quelle entrée périodique : c'est tout l'objet de ce chapitre. On verra en contrepoint qu'un système **non linéaire** se trahit par la création de fréquences nouvelles, propriété exploitée en modulation (**E4**).

I Systèmes linéaires et fonction de transfert

I.1 Linéarité et superposition

Définition — Système linéaire R

Un système d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ est **linéaire** (et invariant dans le temps) si e et s sont reliées par une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_0 s + a_1 \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \cdots + a_n \frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n} = b_0 e + b_1 \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \cdots + b_m \frac{\mathrm{d}^m e}{\mathrm{d}t^m}$$

Les circuits formés de résistors, condensateurs, bobines et ALI en régime linéaire sont des systèmes linéaires ; l'ordre du système est n.

Principe de superposition R

Si s_1 est la réponse à e_1 et s_2 la réponse à e_2, alors la réponse (forcée) à $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ est $\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$. Pour un signal décomposé en série de Fourier, **chaque raie est traitée séparément** et les réponses s'ajoutent.

Justification D. L'équation différentielle est linéaire : en multipliant celle vérifiée par (e_1, s_1) par λ_1, celle vérifiée par (e_2, s_2) par λ_2, et en sommant, on constate que $\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$ vérifie l'équation de second membre construit sur $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$.

I.2 Réponse à une entrée sinusoïdale, stabilité

Régime sinusoïdal établi R D

Pour un système linéaire **stable**, une entrée $e = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$ donne, une fois le régime transitoire éteint, une sortie **sinusoïdale de même pulsation** :

$$s(t) = |\underline{H}(\mathrm{j}\omega)|\, E_m \cos\left(\omega t + \varphi_e + \arg \underline{H}(\mathrm{j}\omega)\right) \qquad \underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{b_0 + b_1 \mathrm{j}\omega + \cdots + b_m (\mathrm{j}\omega)^m}{a_0 + a_1 \mathrm{j}\omega + \cdots + a_n (\mathrm{j}\omega)^n}$$

Démonstration. La solution générale est la somme de la solution de l'équation homogène (régime libre, qui s'amortit si le système est stable) et d'une solution particulière. En notation complexe, $\underline{e} = \underline{E}_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$; on cherche $\underline{s} = \underline{S}_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$. Chaque dérivation multiplie par $\mathrm{j}\omega$, donc $\underline{S}_m \sum a_k (\mathrm{j}\omega)^k = \underline{E}_m \sum b_k (\mathrm{j}\omega)^k$: la sortie est sinusoïdale de pulsation ω, d'amplitude complexe $\underline{S}_m = \underline{H}\underline{E}_m$.

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2 R

Un système est **stable** si son régime libre tend vers 0. Pour un système d'ordre 1 ou 2, il faut et il suffit que **tous les coefficients a_k du membre de gauche soient non nuls et de même signe**. La notion de fonction de transfert n'a de sens physique que pour un système stable.

Justification. Ordre 1 : $a_1\dot{s} + a_0 s = 0$ donne $s \propto \mathrm{e}^{-a_0 t/a_1}$, qui décroît si $a_0/a_1 > 0$. Ordre 2 : les racines de $a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$ ont pour somme $-a_1/a_2$ et pour produit a_0/a_2 ; elles sont de partie réelle strictement négative si et seulement si ces deux quantités sont respectivement négative et positive.

☞ Méthode — Passer de $\underline{H}$ à l'équation différentielle M

On écrit $\underline{H}$ comme un quotient de polynômes en $\mathrm{j}\omega$, on fait le produit en croix $\underline{S} \times$ (dénominateur) $=$ $\underline{E} \times$ (numérateur), puis on remplace chaque facteur $\mathrm{j}\omega$ par $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$. Exemple :

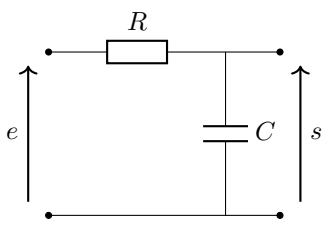
$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{Q\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{Q\omega_0}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = H_0\, e,$$

système stable car les trois coefficients sont positifs.

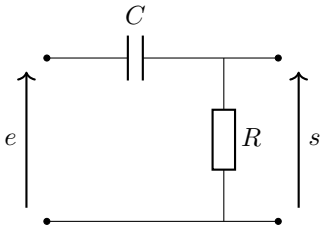
I.3 Filtres usuels (rappels)

★ À retenir

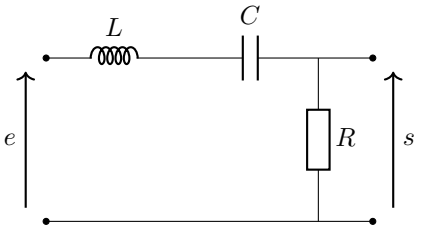
Filtre	**Forme canonique** ($x = \omega/\omega_c$ ou ω/ω_0)	**Comportements asymptotiques**
Passe-bas, ordre 1	$\dfrac{H_0}{1+\mathrm{j}x}$	0 puis -20 dB/déc ; -3 dB et $-\pi/4$ en $x=1$
Passe-haut, ordre 1	$\dfrac{H_0\,\mathrm{j}x}{1+\mathrm{j}x}$	$+20$ puis 0 dB/déc ; -3 dB et $+\pi/4$ en $x=1$
Passe-bas, ordre 2	$\dfrac{H_0}{1-x^2+\mathrm{j}\frac{x}{Q}}$	0 puis -40 dB/déc ; résonance si $Q > 1/\sqrt{2}$
Passe-haut, ordre 2	$\dfrac{-H_0\,x^2}{1-x^2+\mathrm{j}\frac{x}{Q}}$	$+40$ puis 0 dB/déc
Passe-bande, ordre 2	$\dfrac{H_0}{1+\mathrm{j}Q\left(x-\frac{1}{x}\right)}$	$+20$ puis -20 dB/déc ; maximum H_0 en $x=1$, bande passante $\Delta\omega = \omega_0/Q$



passe-bas



passe-haut



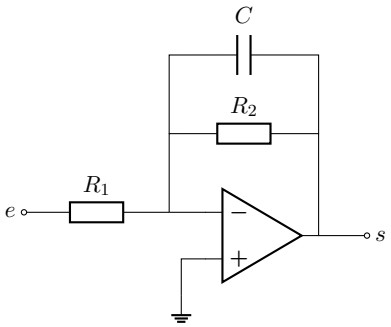
passe-bande

Pour le RLC série (sortie sur R) : $\underline{H} = \dfrac{R}{R + \mathrm{j}L\omega + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}} = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}Q\left(x-\frac{1}{x}\right)}$ avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

Filtres actifs. Avec un ALI, on réalise les mêmes fonctions sans que la charge ne modifie la fonction de transfert (impédance de sortie nulle). Le montage ci-contre, inverseur dont la contre-réaction est formée de R_2 et C en parallèle, donne

$$\underline{H} = -\frac{\underline{Z}_2}{R_1} = -\frac{R_2/R_1}{1+\mathrm{j}R_2C\omega},$$

un passe-bas du premier ordre de gain statique $-R_2/R_1$ (amplificateur) et de pulsation de coupure $1/(R_2C)$.



☞ Exercices d'application

EXERCICE 1 — Fonction de transfert, équation différentielle et stabilité ✦✦✧✧✧

Q-1) Un filtre est régi par $\tau\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = -\tau\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$. Donner sa fonction de transfert, sa nature et sa pulsation de coupure.

Q-2) Pour le filtre actif ci-dessus, $R_1 = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 10\,\mathrm{nF}$. Calculer le gain statique en décibels et la fréquence de coupure. Écrire l'équation différentielle.

Q-3) Un système bouclé obéit à $\ddot{s} + (2-K)\omega_0\dot{s} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 e$. Pour quelles valeurs de K est-il stable ? Que se passe-t-il pour $K = 2$?

Correction

Q-1) $(1+\mathrm{j}\omega\tau)\underline{S} = -\mathrm{j}\omega\tau\underline{E}$: $\underline{H} = -\dfrac{\mathrm{j}\omega\tau}{1+\mathrm{j}\omega\tau}$; passe-haut du premier ordre (gain haute fréquence -1), $\omega_c = 1/\tau$.

Q-2) $|H_0| = 10$, soit $20\,\mathrm{dB}$; $f_c = \dfrac{1}{2\pi R_2 C} = 1{,}6\,\mathrm{kHz}$. $\underline{S}(1+\mathrm{j}R_2C\omega) = -\dfrac{R_2}{R_1}\underline{E}$ donne $R_2C\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = -\dfrac{R_2}{R_1}e$.

Q-3) Stabilité si les coefficients 1, $(2-K)\omega_0$, ω_0^2 sont de même signe : $K < 2$. Pour $K = 2$, le terme d'amortissement disparaît : le régime libre est sinusoïdal non amorti, le système oscille (principe d'un oscillateur).

II Action d'un filtre sur un signal périodique

II.1 Méthode générale

Sortie d'un filtre linéaire R

Si l'entrée s'écrit $e(t) = E_0 + \sum_{n\geq 1} E_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$, la sortie en régime établi est

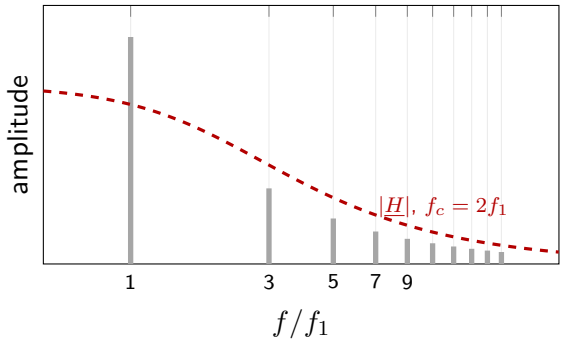
$$s(t) = \underline{H}(0)\, E_0 + \sum_{n\geq 1} |\underline{H}(\mathrm{j}n\omega)|\, E_n \cos\left(n\omega t + \varphi_n + \arg \underline{H}(\mathrm{j}n\omega)\right)$$

La sortie est périodique de même période que l'entrée ; son spectre ne contient **que des fréquences déjà présentes** dans l'entrée : un filtre linéaire ne crée aucune fréquence, il modifie les amplitudes et les phases des raies existantes.

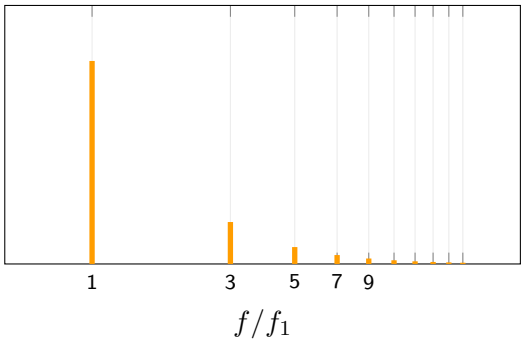
☞ Méthode — Prévoir la sortie d'un filtre M

1. Écrire le spectre d'entrée (formulaire de **E1**) : E_0, E_n, φ_n.
2. **Lecture graphique** : superposer le diagramme de Bode en gain au spectre d'entrée, tracé en fonction de $\log f$; on voit immédiatement quelles raies sont transmises, atténuées ou éliminées.
3. **Calcul** : pour chaque raie significative, calculer $|\underline{H}(\mathrm{j}n\omega)|$ et $\arg \underline{H}(\mathrm{j}n\omega)$; la composante continue est multipliée par $\underline{H}(0)$ (réel).
4. **Forme temporelle** : comparer la sortie à l'entrée (raies dominantes, comportement intégrateur ou dérivateur, §III) et conclure.

Entrée : carré, et gain d'un passe-bas



Sortie : produit raie par raie

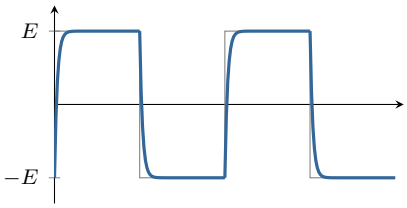


Un carré de fréquence f_1 traverse un passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure $f_c = 2f_1$: les harmoniques sont d'autant plus atténués que leur rang est élevé, le fondamental passe presque intact.

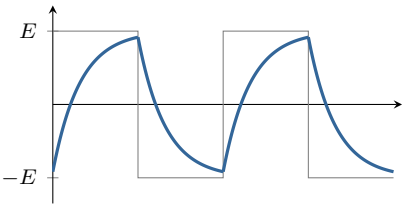
II.2 Exemple : carré filtré par un passe-bas du premier ordre

Selon la position de f_c par rapport à la fréquence f du carré, la sortie change complètement d'allure :

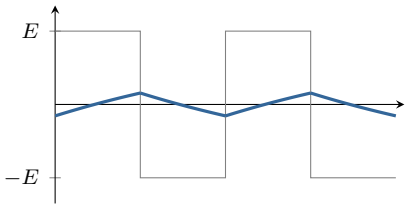
$f_c = 10f$: fronts arrondis



$f_c = f$: intermédiaire



$f_c = f/10$: triangle



Régime établi : sur chaque demi-période, s relaxe exponentiellement vers $\pm E$; son amplitude vaut $E\tanh\big(T/(4\tau)\big)$ avec $\tau = 1/(2\pi f_c)$ (exercice d'approfondissement 7).

- $f_c \gg f$: les premières raies, qui portent l'allure du signal, passent ; seules les très hautes fréquences sont coupées : le carré garde sa forme, avec des **fronts arrondis** de durée de l'ordre de τ.
- $f_c \ll f$: toutes les raies sont dans la zone -20 dB/déc ; elles sont divisées par nf/f_c et déphasées de $-\pi/2$: amplitudes en $1/n^2$, c'est un **triangle** de faible amplitude (comportement intégrateur, §III).

II.3 Filtrage sélectif

Extraire, éliminer, séparer R

- Un **passe-bande sélectif** (Q grand) centré sur nf extrait l'harmonique n : la sortie est quasi sinusoïdale de fréquence nf. C'est le principe de l'accord d'un récepteur radio et des analyseurs de spectre analogiques.
- Un **passe-haut** de fréquence de coupure très inférieure à f (ou un simple condensateur de liaison, position AC de l'oscilloscope) supprime la composante continue sans déformer la partie variable.
- Pour séparer deux composantes de fréquences voisines, il faut un filtre d'ordre élevé (pente $-20n$ dB/déc) ou très sélectif.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 2 — **Séparer un signal utile d'un parasite** ✦✦✧✧✧

Un signal $e(t) = 2\cos(2\pi f_1 t) + 0{,}5\cos(2\pi f_2 t)$ (en volts) contient une composante utile à $f_1 = 200\,\text{Hz}$ et un parasite à $f_2 = 20\,\text{kHz}$.

Q-1) On utilise un passe-bas du premier ordre de gain statique 1 et de fréquence de coupure $f_c = 2\,\text{kHz}$. Écrire $s(t)$.

Q-2) Même question avec un passe-bas du second ordre de même $f_c = f_0$, de facteur de qualité $Q = 1/\sqrt{2}$, pour lequel $|\underline{H}| = 1/\sqrt{1+x^4}$. Conclure.

Correction

Q-1) Pour $x = 0{,}1$: $|\underline{H}| = 1/\sqrt{1{,}01} = 0{,}995$, $\varphi = -\arctan 0{,}1 = -5{,}7°$; pour $x = 10$: $|\underline{H}| = 1/\sqrt{101} = 0{,}0995$, $\varphi = -84{,}3°$. $s = 1{,}99\cos(2\pi f_1 t - 5{,}7°) + 0{,}050\cos(2\pi f_2 t - 84{,}3°)$: le parasite ne vaut plus que $2{,}5\,\%$ du signal utile (contre $25\,\%$).

Q-2) Pour $x = 0{,}1$: $|\underline{H}| \approx 1$; pour $x = 10$: $|\underline{H}| = 1/\sqrt{10\,001} \approx 0{,}010$, d'où une amplitude parasite de $5\,\text{mV}$, soit $0{,}25\,\%$ du signal utile. Gagner un ordre fait gagner 20 dB supplémentaires une décade après la coupure.

EXERCICE 3 **Extraire l'harmonique 3 d'un carré** ★★★☆☆

Un carré de fréquence $f_1 = 1\,\text{kHz}$ attaque un passe-bande d'ordre 2, de gain maximal 1, centré sur $f_0 = 3f_1$.

Q-1) Exprimer le gain $G(x)$ pour $x = f/f_0$ et l'évaluer pour le fondamental et l'harmonique 5 lorsque $Q \gg 1$.

Q-2) Quelle valeur minimale de Q faut-il pour que, en sortie, le fondamental soit au moins 20 fois plus faible que l'harmonique 3 ? Vérifier alors la contribution de l'harmonique 5.

Q-3) Proposer L et R pour un RLC série (sortie sur R) avec $C = 100\,\text{nF}$.

Correction

Q-1) $G = \dfrac{1}{\sqrt{1+Q^2(x-1/x)^2}}$. Fondamental, $x = 1/3$: $|x - 1/x| = 8/3$, $G \approx \dfrac{3}{8Q}$. Harmonique 5, $x = 5/3$: $|x - 1/x| = 16/15$, $G \approx \dfrac{15}{16Q}$.

Q-2) En entrée, le fondamental est 3 fois plus grand que l'harmonique 3 (qui passe avec un gain 1). Il faut $3 \times \dfrac{3}{8Q} \leq \dfrac{1}{20}$, soit $Q \geq 22{,}5$. Pour $Q = 22{,}5$, l'harmonique 5, d'amplitude d'entrée $3/5$ de celle du rang 3, sort avec le rapport $\dfrac{3}{5} \times \dfrac{15}{16 \times 22{,}5} = 0{,}025$: convenable.

Q-3) $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ donne $L = \dfrac{1}{(2\pi \times 3\,\text{kHz})^2 C} = 28\,\text{mH}$; $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ donne $R = \dfrac{1}{Q}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = \dfrac{530}{22{,}5} = 24\,\Omega$ (en négligeant la résistance de la bobine, qui serait ici du même ordre : en pratique, on utilise un filtre actif).

III Caractères moyenneur, intégrateur et dérivateur

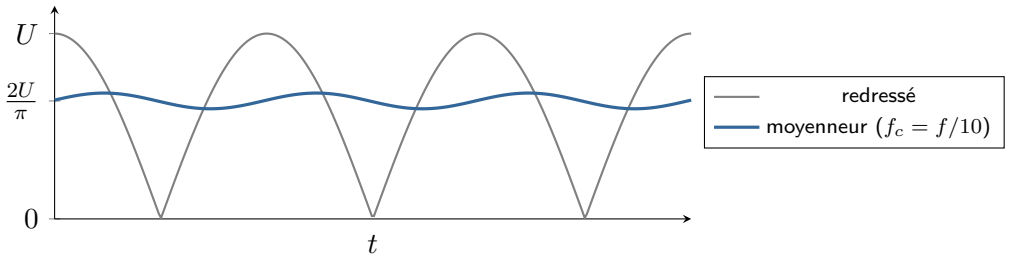
III.1 Comportement moyenneur

Moyenneur R

Un passe-bas dont la fréquence de coupure est très inférieure à la fréquence f du signal ($f_c \ll f$) ne transmet pratiquement que la composante continue :

$$s(t) \approx \underline{H}(0)\,\langle e \rangle + \text{ondulation résiduelle}$$

Pour un premier ordre, le fondamental est atténué d'un facteur f/f_c environ ; pour un second ordre, d'un facteur $(f/f_0)^2$. L'ondulation résiduelle est dominée par la première raie non nulle.



Tension redressée double alternance lissée par un passe-bas du premier ordre : il reste la valeur moyenne $2U/\pi$ et une petite ondulation à la fréquence du fondamental.

III.2 Comportement intégrateur

Intégrateur R D

Dans un domaine de fréquences où la fonction de transfert s'écrit $\underline{H} \approx \dfrac{K}{\mathrm{j}\omega}$ (pente -20 dB/déc, phase $-\pi/2$), la **partie variable** de la sortie est proportionnelle à une primitive de la partie variable de l'entrée :

$$\tilde{s}(t) = K \int \tilde{e}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{passe-bas du 1}^{\text{er}}\text{ ordre, } \omega \gg \omega_c : \quad \underline{H} \approx \frac{H_0\,\omega_c}{\mathrm{j}\omega}, \quad \tilde{s} = \frac{H_0}{\tau}\int \tilde{e}\,\mathrm{d}t$$

Condition : **toutes les raies significatives** de $\tilde{e}$ doivent appartenir à ce domaine, soit, pour le passe-bas, $f \gtrsim 10 f_c$.

Démonstration. $\underline{S} = \dfrac{K}{\mathrm{j}\omega}\underline{E}$ s'écrit $\mathrm{j}\omega\underline{S} = K\underline{E}$, c'est-à-dire $\dfrac{\mathrm{d}\tilde{s}}{\mathrm{d}t} = K\tilde{e}$ pour chaque raie, donc pour leur somme. La composante continue, elle, est transmise avec le gain $\underline{H}(0) = H_0$ du passe-bas : ce n'est pas une intégration de la valeur moyenne (qui donnerait une rampe divergente).

Remarque

Montage pseudo-intégrateur. Un intégrateur pur à ALI (R en entrée, C en contre-réaction, $\underline{H} = -1/(\mathrm{j}RC\omega)$) intègre aussi les tensions de décalage et sature au bout de quelques secondes. On place une résistance R' en parallèle sur C : $\underline{H} = -\dfrac{R'/R}{1+\mathrm{j}R'C\omega}$ est un passe-bas qui intègre les signaux de fréquence $f \gg 1/(2\pi R'C)$ et n'amplifie le continu que d'un facteur fini R'/R. C'est la « condition sur la période du signal à intégrer » vérifiée en TP.

III.3 Comportement dérivateur

Dérivateur R

Dans un domaine où $\underline{H} \approx K'\mathrm{j}\omega$ (pente $+20$ dB/déc, phase $+\pi/2$), $s(t) = K'\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$. Pour un passe-haut du premier ordre, c'est le cas aux basses fréquences ($\omega \ll \omega_c$) : $\underline{H} \approx H_0\mathrm{j}\omega/\omega_c$ et $s = H_0\tau\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$. Un triangle devient un carré.

Remarque

Un passe-bande d'ordre 2 est **dérivateur** pour $\omega \ll \omega_0$ ($\underline{H} \approx \mathrm{j}\frac{H_0}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}$) et **intégrateur** pour $\omega \gg \omega_0$ ($\underline{H} \approx \frac{H_0}{\mathrm{j}Q}\frac{\omega_0}{\omega}$). Un passe-bas d'ordre 2 est « double intégrateur » en haute fréquence (pente -40 dB/déc, phase $-\pi$).

✗ Attention, erreurs fréquentes

- Le caractère intégrateur ou dérivateur n'est assuré que si **toutes** les harmoniques utiles sont dans le bon domaine : un carré de fréquence $f = 2f_c$ attaquant un passe-bas n'est pas intégré correctement, car son fondamental est encore près de la coupure.
- L'intégration s'accompagne d'une forte atténuation (le signal intégré est petit) ; la dérivation amplifie le bruit haute fréquence.

☞ Exercices d'application

EXERCICE 4 Lisser une tension redressée ✦✦✧✧✧

La tension redressée $u = U|\cos(\omega_0 t)|$ ($U = 325\,\text{V}$, $f_0 = 50\,\text{Hz}$) a pour composante continue $207\,\text{V}$ et pour raies principales $138\,\text{V}$ à $100\,\text{Hz}$ et $27{,}6\,\text{V}$ à $200\,\text{Hz}$ (**E1**). On la filtre par un passe-bas du premier ordre de gain statique 1 et de fréquence de coupure $f_c = 1\,\text{Hz}$.

Q-1) Évaluer la tension de sortie et son ondulation.

Q-2) Quelle fréquence de coupure faut-il pour une ondulation d'amplitude inférieure à $0{,}1\,\text{V}$? Commenter.

Correction

Q-1) $s \approx 207\,\text{V}$; raie à $100\,\text{Hz}$: $138 \times \dfrac{1}{100} = 1{,}4\,\text{V}$; raie à $200\,\text{Hz}$: $27{,}6/200 = 0{,}14\,\text{V}$. Ondulation d'amplitude $\approx 1{,}4\,\text{V}$ à $100\,\text{Hz}$, soit $0{,}7\,\%$.

Q-2) $138\,f_c/100 \leq 0{,}1$ impose $f_c \leq 0{,}07\,\text{Hz}$, soit $\tau \geq 2{,}2\,\text{s}$: le temps de réponse devient très long. On préfère un filtre du second ordre (atténuation $(f/f_0)^2$) ou un condensateur de forte capacité directement en sortie du pont.

EXERCICE 5 Triangle dérivé, carré intégré ✦✦✧✧✧

Q-1) Un triangle $\pm 1\,\text{V}$ de fréquence $100\,\text{Hz}$ attaque un passe-haut RC de fréquence de coupure $10\,\text{kHz}$. Justifier le comportement dérivateur et décrire la sortie (forme, amplitude). Vérifier sur le fondamental.

Q-2) Un carré $\pm 5\,\text{V}$ de fréquence $2\,\text{kHz}$ attaque un pseudo-intégrateur de fonction de transfert $\underline{H} = -\dfrac{10}{1 + \text{j}f/f_c}$, $f_c = 20\,\text{Hz}$. Décrire la sortie et calculer son amplitude crête à crête.

Correction

Q-1) Toutes les raies utiles (jusqu'à quelques kHz) vérifient $f \ll f_c$: $s = \tau \dfrac{\text{d}e}{\text{d}t}$ avec $\tau = \dfrac{1}{2\pi f_c} = 15{,}9\,\mu\text{s}$. La pente du triangle vaut $\pm\dfrac{4E}{T} = \pm 400\,\text{V}\cdot\text{s}^{-1}$: la sortie est un carré $\pm 6{,}4\,\text{mV}$. Vérification : fondamental d'entrée $8E/\pi^2 = 0{,}811\,\text{V}$, gain $f/f_c = 0{,}01$, d'où $8{,}1\,\text{mV}$, égal à $\dfrac{4}{\pi} \times 6{,}4\,\text{mV}$, fondamental d'un carré de $6{,}4\,\text{mV}$.

Q-2) $f = 100 f_c$: $\underline{H} \approx -\dfrac{10 f_c}{\text{j}f}$, soit $\tilde{s} = -\dfrac{10}{\tau}\displaystyle\int \tilde{e}\,\text{d}t$ avec $\tau = \dfrac{1}{2\pi f_c} = 7{,}96\,\text{ms}$. Triangle de pente $\mp\dfrac{10E}{\tau} = \mp 6{,}3 \times 10^3\,\text{V}\cdot\text{s}^{-1}$ pendant $T/2 = 0{,}25\,\text{ms}$: amplitude crête à crête $1{,}6\,\text{V}$, en opposition de phase avec l'entrée (signe $-$).

IV Systèmes non linéaires : apparition de nouvelles fréquences

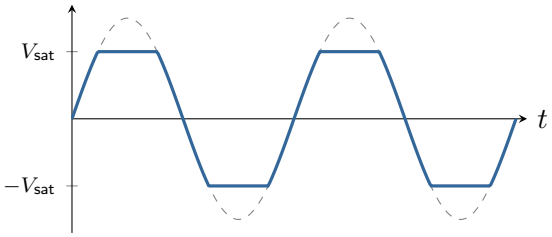
Signature d'une non-linéarité R

Un système linéaire attaqué par une sinusoïde de fréquence f ne délivre que la fréquence f. Si la sortie contient des fréquences **absentes de l'entrée** (harmoniques $2f$, $3f$…, composante continue, fréquences somme et différence $f_1 \pm f_2$ pour deux entrées), le système est **non linéaire**.

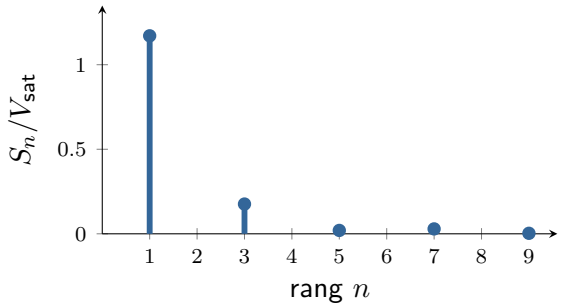
Exemples D.

- **Quadrateur** (multiplieur dont les deux entrées reçoivent e, **E4**) : $s = ke^2$ avec $e = E\cos\omega t$ donne $s = \dfrac{kE^2}{2} + \dfrac{kE^2}{2}\cos(2\omega t)$: apparition du continu et de l'harmonique 2.
- **Écrêtage** : un ALI saturé, ou un amplificateur dont la sortie est limitée à $\pm V_{\text{sat}}$, transforme une sinusoïde trop ample en signal « aplati » qui contient des harmoniques impairs (symétrie de glissement conservée).
- **Redressement** par une diode : la sortie contient une composante continue et des harmoniques pairs (E1, exercice d'approfondissement).
- **Produit de deux signaux** : $\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) = \frac{1}{2}\big[\cos((\omega_1+\omega_2)t) + \cos((\omega_1-\omega_2)t)\big]$: c'est le principe de la modulation (**E4**).

Écrêtage d'une sinusoïde d'amplitude $1{,}5\,V_{\text{sat}}$



Spectre de la sortie



☞ Méthode — Tester la linéarité d'un montage M

On envoie une sinusoïde pure et on observe le spectre de sortie (FFT de l'oscilloscope) : toute raie à $2f$, $3f$… dépassant le niveau de bruit trahit une non-linéarité, que l'on quantifie par le taux de distorsion harmonique (**E1**). On recommence en augmentant l'amplitude : la plupart des systèmes réels ne sont linéaires que pour des signaux assez faibles (saturation, vitesse de balayage limitée d'un ALI).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 6 — Distorsion d'un amplificateur ✦✦✧✧✧

Un amplificateur imparfait délivre $s = ae + be^2$ avec $a = 10$ et $b = 0{,}5\,\text{V}^{-1}$.

Q-1) L'entrée est $e = E\cos\omega t$ avec $E = 0{,}2\,\text{V}$. Donner le spectre de la sortie et son taux de distorsion harmonique.

Q-2) Comment le taux de distorsion varie-t-il avec E ?

Q-3) L'entrée est maintenant $e = E\cos\omega_1 t + E\cos\omega_2 t$. Quelles fréquences apparaissent en sortie ?

Correction

Q-1) $s = \dfrac{bE^2}{2} + aE\cos\omega t + \dfrac{bE^2}{2}\cos 2\omega t$: continu $10\,\text{mV}$, fondamental $2{,}0\,\text{V}$, harmonique 2 $10\,\text{mV}$.
$\text{THD} = \dfrac{bE^2/2}{aE} = \dfrac{bE}{2a} = 0{,}5\,\%$.

Q-2) $\text{THD} = \dfrac{bE}{2a}$ croît proportionnellement à E : la non-linéarité se révèle aux fortes amplitudes.

Q-3) Le terme be^2 contient $\cos^2\omega_1 t$, $\cos^2\omega_2 t$ et $2\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t$: on trouve 0, f_1, f_2, $2f_1$, $2f_2$, f_1+f_2 et $|f_1-f_2|$ (intermodulation).

V Activité numérique : filtrer un signal par son spectre

Python : sortie d'un passe-bande attaqué par un carré

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

f1, E = 1e3, 1.0                    # carre +-E de frequence f1
f0, Q, H0 = 3e3, 10, 1.0            # passe-bande centre sur l'harmonique 3
t = np.linspace(0, 3/f1, 3000)
H = lambda f: H0/(1 + 1j*Q*(f/f0 - f0/f))

e, s = np.zeros_like(t), np.zeros_like(t)
for n in range(1, 400, 2):          # harmoniques impairs du carre
    En = 4*E/(n*np.pi)
    e += En*np.sin(2*np.pi*n*f1*t)
    Hn = H(n*f1)
    s += abs(Hn)*En*np.sin(2*np.pi*n*f1*t + np.angle(Hn))

plt.plot(t*1e3, e, label="entree"); plt.plot(t*1e3, s, label="sortie")
plt.xlabel("t (ms)"); plt.legend(); plt.grid(); plt.show()
```

Pistes : faire varier Q ; remplacer H par un passe-bas du premier ordre et retrouver les trois régimes du §II.2 ; tracer les spectres d'entrée et de sortie avec `plt.stem`.

VI Synthèse

★ À retenir

- Système linéaire : équation différentielle linéaire à coefficients constants ; superposition ; une sinusoïde reste une sinusoïde de même fréquence.
- $\underline{H}(\mathrm{j}\omega)$: quotient de polynômes en $\mathrm{j}\omega$, $\mathrm{j}\omega \leftrightarrow \mathrm{d}/\mathrm{d}t$; ordres 1 et 2 stables si les coefficients du membre de gauche sont de même signe.
- Sortie : $s = \underline{H}(0)E_0 + \sum |\underline{H}(\mathrm{j}n\omega)|E_n \cos(n\omega t + \varphi_n + \arg \underline{H}(\mathrm{j}n\omega))$; aucune fréquence nouvelle.
- Moyenneur : passe-bas, $f_c \ll f$. Intégrateur : $\underline{H} \approx K/\mathrm{j}\omega$ (-20 dB/déc, $-\pi/2$) sur toutes les raies utiles. Dérivateur : $\underline{H} \approx K'\mathrm{j}\omega$ ($+20$ dB/déc, $+\pi/2$).
- Passe-bande sélectif : extraction d'un harmonique ; passe-haut : suppression du continu.
- Non-linéarité $\Leftrightarrow$ fréquences nouvelles en sortie (harmoniques, continu, $f_1 \pm f_2$).

✗ Attention, erreurs fréquentes

Erreurs classiques : oublier la composante continue (transmise avec $\underline{H}(0)$, nulle pour un passe-haut ou un passe-bande) ; appliquer la même atténuation à toutes les raies ; oublier les phases (qui déforment le signal même si les amplitudes sont peu modifiées) ; parler d'intégrateur alors que le fondamental est proche de la coupure ; confondre un filtre linéaire (qui ne crée pas de fréquence) avec un dispositif non linéaire.

VII Exercices d'approfondissement

EXERCICE 7 Carré filtré : étude temporelle exacte

★★★☆☆

Un carré $\pm E$ de période T attaque un filtre RC passe-bas ($\tau = RC$). On étudie le régime établi.

Q-1) Sur $[0, T/2]$, l'entrée vaut E. Écrire $s(t)$ sachant que $s(0) = -A$, où A est l'amplitude de la sortie.

Q-2) En utilisant la symétrie $s(T/2) = +A$, montrer que $A = E\tanh\left(\dfrac{T}{4\tau}\right)$.

Q-3) Retrouver les deux limites : fronts arrondis ($\tau \ll T$) et intégrateur ($\tau \gg T$). Dans le second cas, comparer à l'amplitude du fondamental de la sortie calculée par la méthode spectrale.

Correction

Q-1) $\tau\dot{s} + s = E$ avec $s(0) = -A$: $s(t) = E - (E + A)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

Q-2) $s(T/2) = A$: $A(1 + \mathrm{e}^{-T/2\tau}) = E(1 - \mathrm{e}^{-T/2\tau})$, soit $A = E\dfrac{1 - \mathrm{e}^{-T/2\tau}}{1 + \mathrm{e}^{-T/2\tau}} = E\tanh\dfrac{T}{4\tau}$.

Q-3) $\tau \ll T$: $A \to E$, la sortie atteint les paliers $\pm E$ (fronts arrondis de durée $\sim 3\tau$). $\tau \gg T$: $A \approx \dfrac{ET}{4\tau}$; la sortie est un triangle (relaxation linéarisée, pente $\pm E/\tau$). Méthode spectrale : fondamental de sortie $\dfrac{4E}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\omega\tau} = \dfrac{2ET}{\pi^2\tau}$; celui d'un triangle d'amplitude A vaut $\dfrac{8A}{\pi^2} = \dfrac{2ET}{\pi^2\tau}$: accord parfait.

EXERCICE 8 Pseudo-intégrateur : choisir les composants

★★★☆☆

On veut intégrer un carré de fréquence comprise entre $500\,\mathrm{Hz}$ et $5\,\mathrm{kHz}$ avec le pseudo-intégrateur (R en entrée, R' et C en parallèle dans la contre-réaction), $C = 10\,\mathrm{nF}$.

Q-1) Montrer que $\underline{H} = -\dfrac{R'/R}{1 + \mathrm{j}R'C\omega}$ et préciser son comportement en haute fréquence.

Q-2) Choisir R' pour que la fréquence de coupure soit dix fois plus petite que la plus basse fréquence à intégrer.

Q-3) L'ALI présente une tension de décalage $V_d = 2\,\mathrm{mV}$, modélisée par une tension continue en série avec l'entrée non inverseuse. Quelle tension continue parasite apparaît en sortie si $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$? Que se passerait-il sans R' ?

Q-4) Calculer l'amplitude crête à crête de la sortie pour un carré $\pm 1\,\mathrm{V}$ de $1\,\mathrm{kHz}$.

Correction

Q-1) Montage inverseur : $\underline{H} = -\dfrac{\underline{Z'}}{R}$ avec $\underline{Z'} = \dfrac{R'}{1 + \mathrm{j}R'C\omega}$. Pour $\omega \gg 1/(R'C)$: $\underline{H} \approx -\dfrac{1}{\mathrm{j}RC\omega}$, intégrateur de constante RC.

Q-2) $f_c = 50\,\mathrm{Hz} = \dfrac{1}{2\pi R'C}$: $R' = \dfrac{1}{2\pi \times 50 \times 10^{-8}} = 318\,\mathrm{k\Omega}$ (valeur normalisée $330\,\mathrm{k\Omega}$).

Q-3) En continu, le condensateur est ouvert : non inverseur de gain $1 + R'/R = 34$, d'où $34 \times 2\,\mathrm{mV} = 68\,\mathrm{mV}$ en sortie, sans gravité. Sans R', le gain continu est infini : le condensateur se charge sans fin et l'ALI sature.

Q-4) $\tilde{s} = -\dfrac{1}{RC}\displaystyle\int \tilde{e}\,\mathrm{d}t$ avec $RC = 0{,}1\,\mathrm{ms}$: pente $\mp 1 \times 10^4\,\mathrm{V\cdot s^{-1}}$ pendant $T/2 = 0{,}5\,\mathrm{ms}$, soit $5\,\mathrm{V}$ crête à crête (triangle $\pm 2{,}5\,\mathrm{V}$).

EXERCICE 9 Identifier un filtre par ses réponses à un carré

★★★☆☆

Un filtre inconnu est attaqué par un carré $\pm E$, $E = 1\,\mathrm{V}$. À $10\,\mathrm{Hz}$, on observe en sortie un carré $\pm 1\,\mathrm{V}$ dont les fronts sont à peine arrondis. À $100\,\mathrm{kHz}$, on observe un triangle d'amplitude $2{,}5\,\mathrm{mV}$, en retard d'un quart de période sur le carré.

Q-1) Que peut-on dire du comportement du filtre en basse fréquence ?

Q-2) Pourquoi l'observation à $100\,\mathrm{kHz}$ exclut-elle un passe-bas du second ordre ? En supposant un passe-bas du premier ordre de gain statique 1, en déduire sa fréquence de coupure.

Q-3) Prévoir la forme et l'amplitude de la sortie pour un carré de $1\,\mathrm{kHz}$ (utiliser l'exercice 7).

Correction

Q-1) Toutes les raies utiles du carré à $10\,\mathrm{Hz}$ sont transmises avec un gain 1 et sans déphasage : le gain basse fréquence vaut 1 (passe-bas probable, de coupure très supérieure à $10\,\mathrm{Hz}$).

Q-2) Un triangle est l'intégrale d'un carré : le filtre est intégrateur (-20 dB/déc, $-\pi/2$, d'où le retard d'un quart de période) sur toutes les raies. Un second ordre serait double intégrateur (-40 dB/déc) et donnerait des arcs de paraboles. Pour $f \gg f_c$: $A = \dfrac{ET}{4\tau} = \dfrac{\pi E f_c}{2f}$, d'où $f_c = \dfrac{2fA}{\pi E} = \dfrac{2\times 10^5 \times 2{,}5\times 10^{-3}}{\pi} = 159\,\mathrm{Hz}$ ($\tau = 1{,}0\,\mathrm{ms}$).

Q-3) À $1\,\mathrm{kHz}$, $f \approx 6 f_c$: ni carré ni triangle, mais des arcs d'exponentielles de constante de temps $\tau = 1{,}0\,\mathrm{ms}$. Amplitude $A = E\tanh\dfrac{T}{4\tau} = \tanh(0{,}25) = 0{,}245\,\mathrm{V}$, très proche de la valeur « intégrateur » $ET/4\tau = 0{,}25\,\mathrm{V}$: les arcs sont presque rectilignes.

VIII Classiques des concours

EXERCICE 10 Du carré à la sinusoïde : un générateur de fonctions

★★★☆☆

Un générateur produit un carré $\pm E$ de fréquence $f = 1\,\mathrm{kHz}$. On souhaite en tirer un triangle, puis une sinusoïde.

Q-1) Le carré attaque un pseudo-intégrateur de fréquence de coupure $10\,\mathrm{Hz}$, de gain $-1/(\mathrm{j}RC\omega)$ en haute fréquence, avec $RC = 0{,}25\,\mathrm{ms}$. Quelle est l'amplitude du triangle obtenu si $E = 5\,\mathrm{V}$?

Q-2) Le triangle, d'amplitude A, attaque un passe-bas d'ordre 2 de Butterworth ($|\underline{H}| = 1/\sqrt{1+x^4}$, $x = f/f_0$) avec $f_0 = f$. Calculer les amplitudes de sortie des raies 1, 3 et 5.

Q-3) En déduire le taux de distorsion harmonique de la sortie. Comparer à celui du triangle ($12\,\%$) et du carré ($48\,\%$).

Q-4) Pourquoi est-il plus efficace de filtrer le triangle que le carré ?

Correction

Q-1) $f = 100 f_c$: intégrateur. Pente $\pm E/(RC) = \pm 2\times 10^4\,\mathrm{V\cdot s^{-1}}$ pendant $T/2 = 0{,}5\,\mathrm{ms}$: $10\,\mathrm{V}$ crête à crête, soit $A = 5\,\mathrm{V}$.

Q-2) Entrée : $\dfrac{8A}{\pi^2 n^2}$, soit $0{,}811A$; $0{,}090A$; $0{,}032A$. Gains : $1/\sqrt{2} = 0{,}707$; $1/\sqrt{82} = 0{,}110$; $1/\sqrt{626} = 0{,}040$. Sortie : $0{,}573A$; $9{,}9\times 10^{-3}A$; $1{,}3\times 10^{-3}A$.

Q-3) THD $\approx \dfrac{\sqrt{(9{,}9\times10^{-3})^2+(1{,}3\times10^{-3})^2}}{0{,}573} = 1{,}7\,\%$: la sortie est très proche d'une sinusoïde.

Q-4) Les harmoniques du triangle sont déjà en $1/n^2$; le filtre ajoute une atténuation en $1/n^2$: au total $1/n^4$. Partant du carré $(1/n)$, on n'obtiendrait que $1/n^3$: THD $\approx \dfrac{(1/3)\times 0{,}110}{0{,}707} = 5{,}2\,\%$ pour la seule raie 3.

EXERCICE 11 — Composante continue et condensateur de liaison

★★☆☆☆

Un capteur délivre $e(t) = U_0 + U_1\cos(2\pi f t)$ avec $U_0 = 2{,}5\,\text{V}$, $U_1 = 50\,\text{mV}$, f comprise entre $20\,\text{Hz}$ et $2\,\text{kHz}$. On veut amplifier 100 fois la seule partie variable, sans saturer un ALI alimenté en $\pm 15\,\text{V}$.

Q-1) Pourquoi ne peut-on pas amplifier directement e par 100 ?

Q-2) On place un passe-haut RC ($C = 1\,\mu\text{F}$) avant l'amplificateur, de résistance d'entrée infinie. Choisir R pour que l'amplitude ne chute pas de plus de $1\,\%$ à $20\,\text{Hz}$.

Q-3) Quel est alors le déphasage introduit à $20\,\text{Hz}$? À $2\,\text{kHz}$?

Correction

Q-1) La composante continue serait amplifiée en $250\,\text{V}$: l'ALI saturerait à $15\,\text{V}$ et le signal utile serait perdu (non-linéarité).

Q-2) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0{,}99$ avec $x = f/f_c$ impose $x \geq 7{,}0$, soit $f_c \leq 2{,}9\,\text{Hz}$ et $R \geq \dfrac{1}{2\pi f_c C} = 56\,\text{k}\Omega$; on prend $R = 100\,\text{k}\Omega$ ($f_c = 1{,}6\,\text{Hz}$).

Q-3) $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$: à $20\,\text{Hz}$, $x = 12{,}6$, $\varphi = 4{,}5°$; à $2\,\text{kHz}$, $\varphi \approx 0{,}05°$, négligeable.

EXERCICE 12 — Éliminer le 50 Hz d'un électrocardiogramme

★★★☆☆

Le signal d'un électrocardiogramme (ECG) est périodique, de fréquence voisine de $1{,}2\,\text{Hz}$; ses harmoniques utiles s'étendent jusqu'à $40\,\text{Hz}$. Il est pollué par un parasite à $f_p = 50\,\text{Hz}$ rayonné par le secteur. On utilise un filtre **coupe-bande** (réjecteur) :

$$\underline{H} = \frac{1-x^2}{1-x^2+\text{j}\dfrac{x}{Q}}, \qquad x = \frac{f}{f_0}.$$

Q-1) Étudier $|\underline{H}|$ en basse fréquence, en haute fréquence et en $x = 1$. Pourquoi choisir $f_0 = f_p$?

Q-2) Quelle valeur minimale de Q garantit une atténuation inférieure à $1\,\text{dB}$ pour l'harmonique de $40\,\text{Hz}$?

Q-3) On prend $Q = 5$. La fréquence du secteur dérive jusqu'à $50{,}5\,\text{Hz}$. Quelle atténuation subit alors le parasite ?

Q-4) Pourquoi un passe-bas de fréquence de coupure $45\,\text{Hz}$ ne conviendrait-il pas ?

Correction

Q-1) BF et HF : $|\underline{H}| \to 1$; en $x = 1$, $\underline{H} = 0$: la fréquence f_0 est totalement supprimée. Avec $f_0 = f_p$, le parasite est éliminé et les autres fréquences, loin de f_0, sont transmises.

Q-2) $x = 0{,}8$, $1 - x^2 = 0{,}36$. $|\underline{H}| \geq 10^{-1/20} = 0{,}891$ impose $\dfrac{0{,}1296}{0{,}1296 + 0{,}64/Q^2} \geq 0{,}794$, soit $\dfrac{0{,}64}{Q^2} \leq 0{,}0337$ et $Q \geq 4{,}4$.

Q-3) $x = 1{,}01$: $1 - x^2 = -0{,}0201$ et $x/Q = 0{,}202$; $|\underline{H}| = \dfrac{0{,}0201}{\sqrt{0{,}0201^2 + 0{,}202^2}} = 0{,}099$, soit $-20\,\mathrm{dB}$: le parasite est encore divisé par 10.

Q-4) Les fréquences 40 et $50\,\mathrm{Hz}$ sont trop proches : un passe-bas du premier ou du second ordre atténuerait à peine le $50\,\mathrm{Hz}$ (moins d'un facteur 2) tout en déformant le signal utile. Le réjecteur, lui, agit sur une bande étroite, de largeur $f_0/Q = 10\,\mathrm{Hz}$.