LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

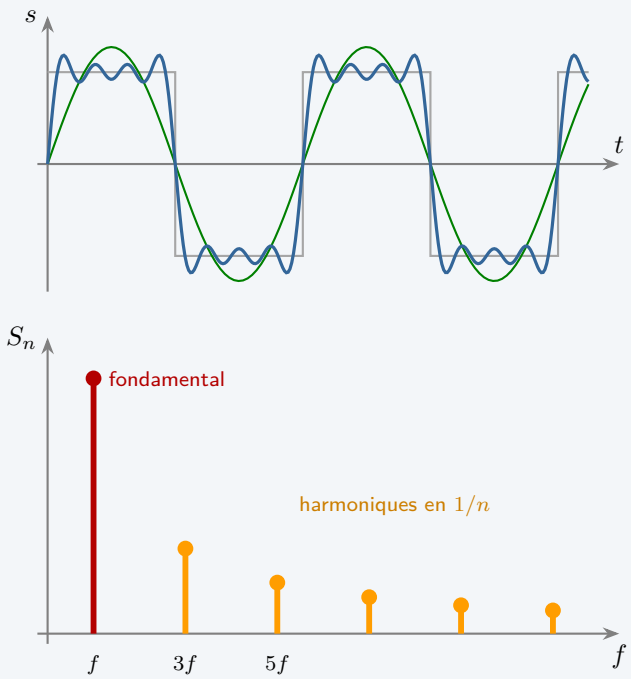
FICHE RÉSUMÉ

E1

ÉLECTRONIQUE

Composition en fréquence d'un signal périodique

Signaux périodiques — Valeurs moyenne et efficace, efficace vraie — Théorème de Fourier — Spectre d'amplitude et de phase — Signaux sinusoïdal, carré, triangulaire, rectangulaire — Rôle des harmoniques — Formule de Parseval



« *Le théorème de Fourier n'est pas seulement l'un des plus beaux résultats de l'analyse moderne : on peut dire qu'il fournit un instrument indispensable pour traiter presque toutes les questions difficiles de la physique moderne.*

— William Thomson (Lord Kelvin) et Peter G. Tait, *Treatise on Natural Philosophy* (1867)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Synthèse de Fourier »

E1 — Fiche résumé

L'essentiel en trois phrases

Un signal périodique de fréquence f est la somme de sa **composante continue** et de sinusoïdes de fréquences nf (fondamental et harmoniques) : c'est le théorème de Fourier. Il possède ainsi deux représentations équivalentes, **temporelle** ($s(t)$) et **fréquentielle** (spectre de raies). La valeur efficace se calcule raie par raie grâce à la formule de **Parseval**, et la régularité du signal se lit sur la décroissance de son spectre.

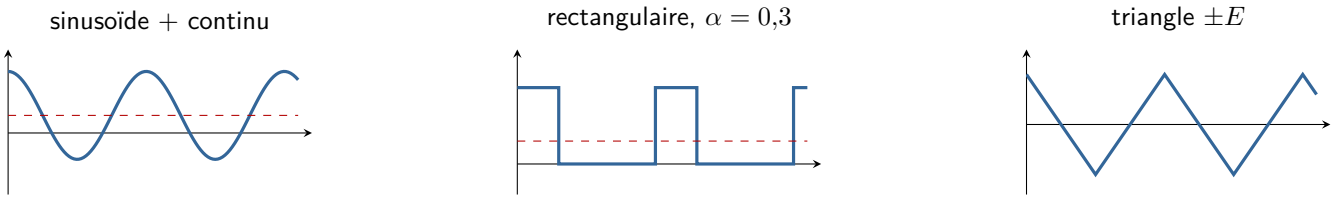
I Valeurs moyenne et efficace

Définition — Définitions, mesure R

$$\langle s\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s\,\mathrm{d}t \qquad S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2\rangle} \qquad S_{\text{eff}}^2 = \langle s\rangle^2 + \tilde{S}_{\text{eff}}^2$$

$\tilde{s} = s - \langle s\rangle$ est la partie variable. Voltmètre : DC → $\langle s\rangle$; AC → $\tilde{S}_{\text{eff}}$; AC+DC (TRMS) → S_{eff} (valeur efficace vraie).

Signal	$\langle s\rangle$	S_{eff}	$\tilde{S}_{\text{eff}}$
$E_0 + E\cos(\omega t + \varphi)$	E_0	$\sqrt{E_0^2 + E^2/2}$	$E/\sqrt{2}$
Rectangulaire $0/E$, rapport cyclique α	αE	$E\sqrt{\alpha}$	$E\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$
Carré $\pm E$	0	E	E
Triangle $\pm E$	0	$E/\sqrt{3}$	$E/\sqrt{3}$
Redressé double alternance $E\lvert\cos\omega t\rvert$	$2E/\pi$	$E/\sqrt{2}$	$E\sqrt{1/2 - 4/\pi^2}$



Signaux usuels ; en pointillés, la valeur moyenne $\langle s\rangle$.

II Théorème de Fourier et spectre

Théorème de Fourier (admis) R

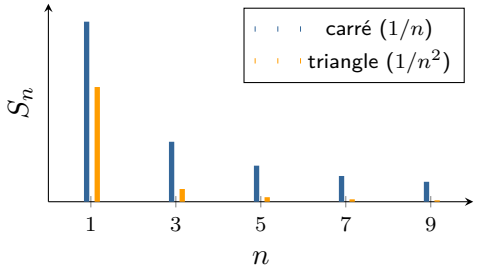
$$s(t) = a_0 + \sum_{n\geq 1}\left[a_n\cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right] = S_0 + \sum_{n\geq 1} S_n\cos(n\omega t + \varphi_n)$$

$$a_0 = \langle s \rangle \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T s\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T s\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad S_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$n = 1$: fondamental ; $n \geq 2$: harmonique de rang n. Spectre d'amplitude : S_n en fonction de nf ; spectre de phase : φ_n.

Symétries R

- s paire : $b_n = 0$ (cosinus seuls) ;
- s impaire : $a_0 = a_n = 0$ (sinus seuls) ;
- $s(t + T/2) = -s(t)$: rangs impairs seuls ;
- retard t_0 : $\varphi_n \to \varphi_n - n\omega t_0$, S_n inchangés.



★ À retenir

Carré $\pm E$ (impair)	$\frac{4E}{\pi}\sum_{p\geq 0}\frac{\sin((2p+1)\omega t)}{2p+1}$	rangs impairs, $1/n$
Triangle $\pm E$ (pair)	$\frac{8E}{\pi^2}\sum_{p\geq 0}\frac{\cos((2p+1)\omega t)}{(2p+1)^2}$	rangs impairs, $1/n^2$
Rectangulaire $0/E$, α	$S_0 = \alpha E,\quad S_n = \frac{2E}{n\pi}\lvert\sin(n\pi\alpha)\rvert$	absents si $n\alpha$ entier
Dents de scie $\pm E$	$\frac{2E}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}\sin(n\omega t)}{n}$	tous rangs, $1/n$

III Rôle des harmoniques, Parseval

- Fondamental : période et **allure générale** ; harmoniques élevés : **fronts raides, angles, détails**.
- Signal discontinu $\Rightarrow S_n \propto 1/n$ (Gibbs : dépassement d'environ $9\,\%$ du saut) ; continu à dérivée discontinue $\Rightarrow S_n \propto 1/n^2$.
- Le spectre d'amplitude ne suffit pas à fixer la forme : les **phases** comptent aussi.
- Un front de durée τ demande des harmoniques jusqu'à $\sim 1/\tau$: $\Delta t \cdot \Delta f \sim 1$.

Formule de Parseval, distorsion R D

$$S_{\text{eff}}^2 = S_0^2 + \sum_{n\geq 1}\frac{S_n^2}{2} \qquad \text{THD} = \frac{\sqrt{\sum_{n\geq 2} S_n^2}}{S_1}$$

Démonstration : en moyenne, tous les produits croisés (pulsations $(n \pm m)\omega \neq 0$) s'annulent ; il reste S_0^2 et $\langle S_n^2\cos^2\rangle = S_n^2/2$.

Ordres de grandeur

Fondamental du carré : $81\,\%$ de la puissance $(8/\pi^2)$; du triangle : $98{,}6\,\%$. THD : carré $48\,\%$, triangle $12\,\%$, onduleur à commande décalée $(\beta = \pi/6)$ $31\,\%$. Secteur : $50\,\text{Hz}$, harmoniques 150, $250\,\text{Hz}$; voix au téléphone $0{,}3$–$3{,}4\,\text{kHz}$; audible $20\,\text{Hz}$–$20\,\text{kHz}$.

IV Méthodes et pièges

☞ Méthode — Exploiter un développement de formulaire M

- Amplitude multipliée par λ : tous les S_n aussi. Constante ajoutée : seul S_0 change (carré $0/E =$ carré $\pm E/2 + E/2$).
- Retard : phases seules modifiées. Dérivation (intégration) : raie n multipliée (divisée) par $n\omega$, déphasée de $+\pi/2$ ($-\pi/2$).
- Contrôler par une valeur particulière ($t = 0$) ou par Parseval.
- Lire un spectre : fondamental $\Rightarrow T$; raie à $0 \Rightarrow$ moyenne ; rangs présents et loi de décroissance $\Rightarrow$ forme.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- $S_{\text{eff}} = S_{\max}/\sqrt{2}$ seulement pour une sinusoïde de moyenne nulle.
- Ce sont les **carrés** des valeurs efficaces qui s'ajoutent ; ne pas oublier S_0^2.
- Harmonique de rang $n \neq$ fréquence n : l'harmonique 3 d'un $50\,\text{Hz}$ est à $150\,\text{Hz}$.
- Un voltmètre non TRMS se trompe pour un signal non sinusoïdal ($+11\,\%$ sur un carré).

Savoir-faire : je coche quand je sais

- ☐ Je calcule $\langle s \rangle$, S_{eff}, $\tilde{S}_{\text{eff}}$ pour les signaux usuels et j'interprète les positions DC, AC, AC+DC.
- ☐ J'énonce le théorème de Fourier sous ses deux formes et je calcule a_n, b_n pour un carré ou un rectangle.
- ☐ J'utilise les symétries pour prévoir les coefficients nuls.
- ☐ J'adapte un développement donné (amplitude, décalage, retard) et je trace un spectre.
- ☐ J'explique le rôle des harmoniques et la décroissance en $1/n$ ou $1/n^2$.
- ☐ J'applique Parseval (valeur efficace, part de puissance, THD).