LYCÉE D'EXCELLENCE
MOHAMMED VI
LEM6 - CASABLANCA

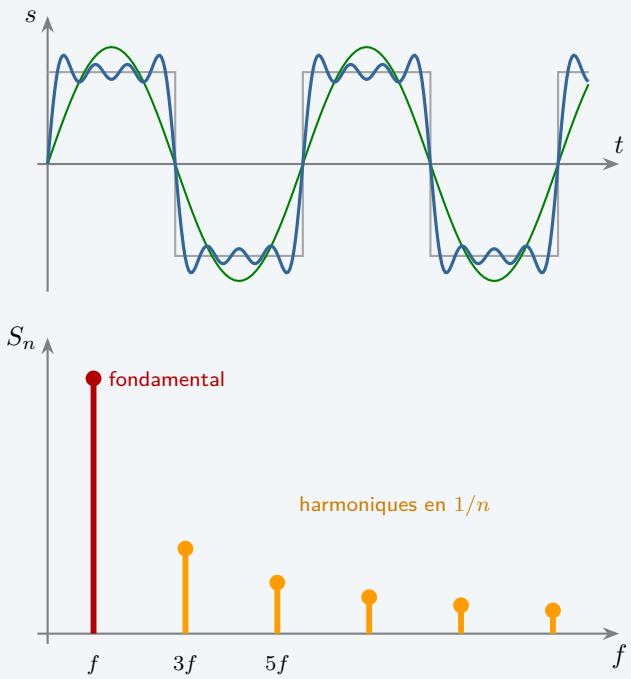
Classes préparatoires aux grandes écoles
MP — Physique-chimie
Année 2026-2027

E1

ÉLECTRONIQUE

Composition en fréquence d'un signal périodique

Signaux périodiques — Valeurs moyenne et efficace, efficace vraie — Théorème de Fourier — Spectre d'amplitude et de phase — Signaux sinusoïdal, carré, triangulaire, rectangulaire — Rôle des harmoniques — Formule de Parseval



« *Le théorème de Fourier n'est pas seulement l'un des plus beaux résultats de l'analyse moderne : on peut dire qu'il fournit un instrument indispensable pour traiter presque toutes les questions difficiles de la physique moderne.*

— William Thomson (Lord Kelvin) et Peter G. Tait, *Treatise on Natural Philosophy* (1867)

physionova
physionova.academy

Pr. CHARIFI
professeurcharifi@gmail.com

Simulation associée sur **PhysioNova**
« Synthèse de Fourier »

E1 — Signaux périodiques

Ce qu'il faut savoir faire à la fin du chapitre

- Calculer la valeur moyenne, la valeur efficace et la valeur efficace vraie d'un signal périodique usuel (sinusoïdal avec composante continue, rectangulaire, carré, triangulaire) ; savoir ce que mesure un voltmètre en position DC, AC et AC+DC.
- Énoncer le théorème de Fourier (admis) sous ses deux formes ; définir composante continue, fondamental, harmoniques, spectres d'amplitude et de phase.
- Passer de la représentation temporelle à la représentation fréquentielle d'un signal, et inversement.
- Établir (ou exploiter, à partir d'un formulaire) le développement en série de Fourier des signaux sinusoïdal, carré et triangulaire ; utiliser les propriétés de symétrie.
- Attribuer aux harmoniques leur rôle dans la forme du signal : allure générale, fronts raides, décroissance en $1/n$ ou $1/n^2$.
- Établir et utiliser la formule de Parseval ; calculer la part de puissance portée par chaque raie et un taux de distorsion harmonique.

Comment lire ce cours

Les résultats sont repérés par des étiquettes : R à connaître par cœur ; D démonstration à savoir refaire ; M méthode à maîtriser. La simulation PhysioNova « Synthèse de Fourier » permet d'ajouter une à une les harmoniques d'un signal carré, triangulaire ou en dents de scie, de modifier leurs amplitudes et leurs phases, et d'observer en direct la forme du signal et son spectre.
Ce chapitre prolonge le régime sinusoïdal forcé et le filtrage de MPSI ; il prépare les chapitres **E2** (effet d'un filtre), **E3** (électronique numérique) et **E4** (modulation). Des **exercices d'application corrigés** suivent chaque notion ; les exercices d'approfondissement et les classiques des concours, également corrigés, terminent le chapitre.

Table des matières

Introduction . . . 4
I Signaux périodiques : grandeurs caractéristiques . . . 4
I.1 Période, fréquence, pulsation . . . 4
I.2 Valeur moyenne, valeur efficace . . . 4
I.3 Signaux usuels . . . 5
II Théorème de Fourier et spectre . . . 6
II.1 Énoncé . . . 6
II.2 Représentations temporelle et fréquentielle . . . 7
II.3 Propriétés de symétrie . . . 7
II.4 Développements des signaux usuels . . . 8
III Rôle des harmoniques dans la forme du signal . . . 10
III.1 Synthèse de Fourier . . . 10
III.2 Rôle des phases . . . 10
III.3 Largeur spectrale et ordres de grandeur . . . 11
IV Valeur efficace et formule de Parseval . . . 11
IV.1 Formule de Parseval . . . 11
V Analyse spectrale en pratique . . . 12
V.1 Obtenir le spectre d'un signal . . . 12
V.2 Activité numérique : calculer et synthétiser . . . 12
VI Synthèse . . . 13

VII Exercices d'approfondissement 14
VIII Classiques des concours 15

Introduction

Un microphone, un capteur de température ou une sonde d'oscilloscope délivrent une tension qui varie dans le temps : c'est la **représentation temporelle** du signal. Fourier a montré en 1807 qu'un signal périodique, aussi compliqué soit-il, est une **somme de sinusoïdes** dont les fréquences sont des multiples entiers de sa fréquence. La liste de ces sinusoïdes, avec leurs amplitudes et leurs phases, constitue la **représentation fréquentielle** du signal : son **spectre**.

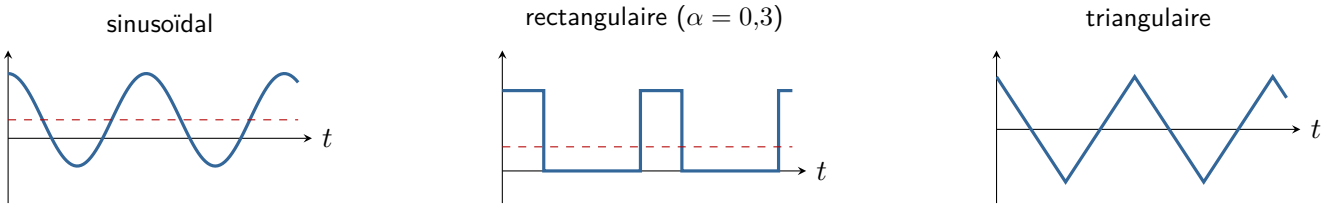
Cette double lecture est l'outil central de tout le thème : un système linéaire traitant chaque sinusoïde séparément, il suffit de connaître le spectre d'entrée pour prévoir l'effet d'un filtre (**E2**) ; l'échantillonnage (**E3**) et la modulation (**E4**) se comprennent comme des déplacements de raies dans le spectre.

I Signaux périodiques : grandeurs caractéristiques

I.1 Période, fréquence, pulsation

Définition — Signal périodique R

Un signal $s(t)$ est **périodique** de période T si $s(t+T) = s(t)$ pour tout t, T étant la plus petite durée positive vérifiant cette propriété. Sa **fréquence** est $f = 1/T$ (en hertz) et sa **pulsation** $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ (en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$).



Trois signaux périodiques usuels ; en pointillés, la valeur moyenne.

I.2 Valeur moyenne, valeur efficace

Définition — Valeur moyenne, valeur efficace R

$$\langle s \rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\,\mathrm{d}t \qquad S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

L'instant t_0 est quelconque (intégrale sur une période). La valeur moyenne est l'aire algébrique sous la courbe sur une période, divisée par T. La valeur efficace d'une tension est la valeur de la tension continue qui dissiperait, dans un même résistor, la même puissance moyenne : $\langle \mathcal{P} \rangle = \langle s^2 \rangle / R = S_{\text{eff}}^2 / R$.

Composante continue et partie variable R

On écrit $s(t) = \langle s \rangle + \tilde{s}(t)$, où $\tilde{s}$ est la **partie variable** (ou alternative), de moyenne nulle. Comme $\langle \tilde{s} \rangle = 0$, le double produit disparaît :

$$S_{\text{eff}}^2 = \langle s \rangle^2 + \tilde{S}_{\text{eff}}^2$$

S_{eff} est la **valeur efficace vraie** (ou totale) ; $\tilde{S}_{\text{eff}}$ est la valeur efficace de la seule partie variable.

Remarque

Ce que mesure un voltmètre numérique. En position **DC**, il affiche la valeur moyenne $\langle s \rangle$. En position **AC**, il affiche $\tilde{S}_{\text{eff}}$ (la composante continue est bloquée par un condensateur d'entrée). En position **AC+DC**, un appareil « efficace vraie » (TRMS, *true root mean square*) affiche S_{eff}. Un appareil d'entrée de gamme (non TRMS) mesure en fait la moyenne de $|s|$ et la multiplie par $\pi/(2\sqrt{2}) \approx 1{,}11$, facteur juste pour une sinusoïde seulement : il se trompe pour tout autre signal (exercice 2).

I.3 Signaux usuels

Valeurs moyenne et efficace des signaux usuels R

Signal	$\langle s \rangle$	S_{eff}	$\tilde{S}_{\text{eff}}$
Sinusoïdal avec continu : $E_0 + E\cos(\omega t + \varphi)$	E_0	$\sqrt{E_0^2 + \dfrac{E^2}{2}}$	$\dfrac{E}{\sqrt{2}}$
Rectangulaire $0/E$, rapport cyclique α	αE	$E\sqrt{\alpha}$	$E\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$
Carré (créneau) $\pm E$	0	E	E
Triangulaire $\pm E$	0	$\dfrac{E}{\sqrt{3}}$	$\dfrac{E}{\sqrt{3}}$

Le **rapport cyclique** $\alpha \in [0,1]$ est la fraction de la période pendant laquelle le signal rectangulaire vaut E.

Démonstrations D.

- **Sinusoïde** : $\langle \cos \rangle = 0$ et $\langle \cos^2 \rangle = \langle \frac{1}{2}(1+\cos 2\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$; en développant $(E_0 + E\cos)^2$, le double produit est de moyenne nulle, d'où $S_{\text{eff}}^2 = E_0^2 + E^2/2$.
- **Rectangulaire** : $\langle s \rangle = \dfrac{1}{T} E\,\alpha T = \alpha E$ et $\langle s^2 \rangle = \alpha E^2$; puis $\tilde{S}_{\text{eff}}^2 = \alpha E^2 - \alpha^2 E^2$.
- **Triangle** : sur une demi-période, s varie linéairement de $-E$ à E ; avec $u = s/E$ uniformément réparti sur $[-1,1]$, $\langle s^2 \rangle = E^2 \cdot \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} u^2 \,\mathrm{d}u = \dfrac{E^2}{3}$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

- La relation $S_{\text{eff}} = S_{\max}/\sqrt{2}$ n'est valable que pour une **sinusoïde de moyenne nulle** : E pour le carré, $E/\sqrt{3}$ pour le triangle.
- La valeur efficace d'une somme n'est pas la somme des valeurs efficaces : ce sont les **carrés** qui s'ajoutent, et seulement lorsque les termes croisés sont de moyenne nulle.

☞ **Exercices d'application**

EXERCICE 1 Moyenne et efficace de deux tensions ★✧✧✧✧

Q-1) Une tension s'écrit $u(t) = 3 + 4\cos(\omega t)$ (en volts). Calculer $\langle u \rangle$, U_{eff} et les indications d'un voltmètre TRMS en positions DC, AC et AC+DC.

Q-2) Une tension rectangulaire vaut $5\,\text{V}$ pendant $20\,\%$ de la période et 0 le reste du temps. Mêmes questions.

Q-3) Pour quel rapport cyclique la partie variable d'un signal rectangulaire $0/E$ a-t-elle la plus grande valeur efficace ?

EXERCICE 2 Le voltmètre qui n'est pas TRMS ★★✧✧✧

Un voltmètre bas de gamme calcule $\langle |u| \rangle$ et affiche $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\langle |u| \rangle$.

Q-1) Vérifier qu'il affiche la bonne valeur efficace pour une tension sinusoïdale $E\cos\omega t$.

Q-2) Quelle valeur affiche-t-il pour un carré $\pm E$? pour un triangle $\pm E$? Calculer l'erreur relative dans chaque cas.

II Théorème de Fourier et spectre

II.1 Énoncé

Théorème de Fourier (admis) R

Tout signal $s(t)$ périodique de période T (pulsation $\omega = 2\pi/T$), physiquement réalisable, est égal à la somme de sa **composante continue** et de sinusoïdes de pulsations multiples de ω :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right] = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

- $S_0 = a_0 = \langle s \rangle$ est la **composante continue** ;
- le terme $n = 1$, de même fréquence f que le signal, est le **fondamental** ;
- le terme de rang $n \geq 2$, de fréquence nf, est l'**harmonique de rang** n ;
- $S_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq 0$ est l'amplitude de la raie n ; φ_n sa phase, avec $a_n = S_n \cos\varphi_n$ et $b_n = -S_n \sin\varphi_n$.

Coefficients de Fourier R

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,\mathrm{d}t \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Justification D. Ces formules découlent de l'**orthogonalité** des fonctions trigonométriques sur une période : pour $n, m \geq 1$,

$$\langle \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\rangle = \langle \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\rangle = \frac{1}{2}\delta_{nm}, \qquad \langle \cos(n\omega t)\sin(m\omega t)\rangle = 0,$$

obtenues en linéarisant les produits (un cosinus de pulsation non nulle est de moyenne nulle). En multipliant le développement par $\cos(m\omega t)$ et en prenant la moyenne, tous les termes disparaissent sauf $a_m/2$: $\langle s\cos(m\omega t)\rangle = a_m/2$. De même pour b_m, et $\langle s\rangle = a_0$.

Remarque

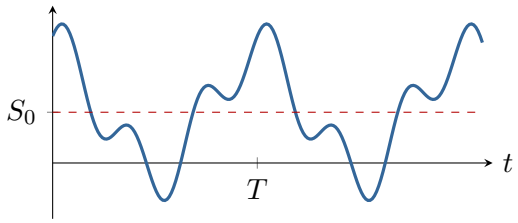
Forme complexe (hors programme, utile en E3). En écrivant $\cos x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x})$, on obtient $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}$ avec $c_n = \langle s(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t} \rangle$; pour $n \geq 1$, $|c_n| = |c_{-n}| = S_n/2$: chaque raie physique est partagée entre les fréquences nf et $-nf$.

II.2 Représentations temporelle et fréquentielle

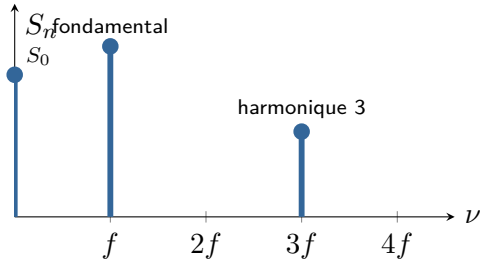
Définition — Spectre d'amplitude, spectre de phase R

Le **spectre d'amplitude** est la représentation des S_n en fonction de la fréquence nf : c'est un **spectre de raies**, régulièrement espacées de f. Le **spectre de phase** représente les φ_n. Un signal possède ainsi deux représentations équivalentes : **dans l'espace des temps** (s en fonction de t) et **dans l'espace des fréquences** (ses deux spectres).

Représentation temporelle



Représentation fréquentielle



Le signal $s(t) = 1 + 1{,}2\cos(\omega t) + 0{,}6\cos(3\omega t - \pi/3)$ et son spectre d'amplitude : trois raies suffisent à le décrire.

II.3 Propriétés de symétrie

Parité et symétrie de glissement R

- Si s est **paire** ($s(-t) = s(t)$), tous les b_n sont nuls : s ne contient que des cosinus.
- Si s est **impaire** ($s(-t) = -s(t)$), a_0 et tous les a_n sont nuls : s ne contient que des sinus.
- Si s vérifie la **symétrie de glissement** $s(t + T/2) = -s(t)$, ses harmoniques de rang pair (et sa composante continue) sont nuls : seuls les rangs **impairs** subsistent.

Démonstration D (glissement). Pour n pair, $\cos\big(n\omega(t + T/2)\big) = \cos(n\omega t + n\pi) = \cos(n\omega t)$. En coupant l'intégrale de a_n en deux demi-périodes et en posant $t' = t - T/2$ dans la seconde : $\displaystyle\int_{T/2}^{T} s(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{T/2} s(t'+T/2)\cos\big(n\omega t'\big)\,\mathrm{d}t' = -\int_0^{T/2} s\cos\big(n\omega t'\big)\,\mathrm{d}t'$: les deux moitiés se compensent, $a_n = 0$; de même $b_n = 0$.

Remarque

Changer l'origine des temps ($t \to t - t_0$) ne modifie que les phases : $\varphi_n \to \varphi_n - n\omega t_0$. Le spectre d'amplitude, lui, ne dépend pas de l'origine choisie ; on peut donc toujours choisir l'origine qui rend le signal pair ou impair pour simplifier les calculs.

II.4 Développements des signaux usuels

Signal carré D. Soit le créneau impair valant $+E$ sur $]0, T/2[$ et $-E$ sur $]T/2, T[$. Il est impair : $a_n = 0$. Il vérifie la symétrie de glissement : seuls les n impairs subsistent. Pour n impair,

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} E\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{4E}{n\omega T}\big[1-\cos(n\pi)\big] = \frac{4E}{n\omega T}\times 2 = \frac{4E}{n\pi}.$$

Signal triangulaire D. Soit le triangle pair valant E en $t=0$ et $-E$ en $t=T/2$. Sa dérivée est un créneau d'amplitude $4E/T$ (la pente vaut $-4E/T$ sur la première demi-période) : $s'(t) = -\dfrac{4E}{T}\cdot\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n\ \text{impair}}\frac{\sin(n\omega t)}{n}$.

On intègre terme à terme (la moyenne de s est nulle) :

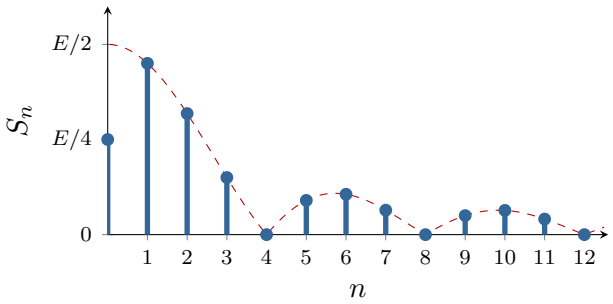
$$s(t) = \frac{16E}{\pi T}\sum_{n\ \text{impair}}\frac{\cos(n\omega t)}{n^2\omega} = \frac{8E}{\pi^2}\sum_{n\ \text{impair}}\frac{\cos(n\omega t)}{n^2}.$$

Vérification en $t=0$: $\sum_{n\ \text{impair}} 1/n^2 = \pi^2/8$ redonne bien $s(0)=E$.

★ À retenir

Signal	Développement en série de Fourier	Spectre
Sinusoïdal $E_0 + E\cos(\omega t)$	$E_0 + E\cos(\omega t)$	deux raies (0 et f)
Carré $\pm E$ (impair)	$\dfrac{4E}{\pi}\displaystyle\sum_{p\geq 0}\frac{\sin\big((2p+1)\omega t\big)}{2p+1}$	rangs impairs, en $1/n$
Triangle $\pm E$ (pair)	$\dfrac{8E}{\pi^2}\displaystyle\sum_{p\geq 0}\frac{\cos\big((2p+1)\omega t\big)}{(2p+1)^2}$	rangs impairs, en $1/n^2$
Rectangulaire $0/E$, α	$S_0 = \alpha E,\quad S_n = \dfrac{2E}{n\pi}\big\lvert\sin(n\pi\alpha)\big\rvert$	tous rangs, sauf $n\alpha$ entier
Dents de scie $\pm E$ (impair)	$\dfrac{2E}{\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}\sin(n\omega t)}{n}$	tous rangs, en $1/n$

Rectangulaire, $\alpha = 1/4$



Spectre d'un signal rectangulaire de rapport cyclique $\alpha = 1/4$: les raies suivent l'enveloppe $2\alpha E\left\lvert\dfrac{\sin x}{x}\right\rvert$ (pointillés) avec $x = n\pi\alpha$; les rangs multiples de $1/\alpha = 4$ sont absents. Pour $\alpha = 1/2$ (carré $0/E$), ce sont tous les rangs pairs qui disparaissent.

☞ Méthode — Exploiter un développement fourni par un formulaire M

Le programme demande d'**exploiter** un développement donné, pas de le redémontrer. On adapte le formulaire par des opérations simples :

1. **changement d'amplitude** : tout se multiplie par le même facteur ;
2. **ajout d'une constante** : seule la composante continue S_0 change (un carré $0/E$ est un carré $\pm E/2$ plus $E/2$) ;

3. **retard** $t \to t - t_0$: les amplitudes sont inchangées, les phases deviennent $\varphi_n - n\omega t_0$;
4. **dérivation, intégration** : la raie n est multipliée (ou divisée) par $n\omega$ et déphasée de $+\pi/2$ (ou $-\pi/2$) ;
5. **contrôle** : vérifier la valeur en un point particulier, ou la valeur efficace par la formule de Parseval (§IV).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 3 Adapter le formulaire

Q-1) Un signal carré varie entre 0 et E, de rapport cyclique $1/2$, et vaut E sur $]0, T/2[$. Écrire son développement en série de Fourier et tracer son spectre d'amplitude.

Q-2) Vérifier la valeur efficace $E/\sqrt{2}$ à l'aide de ce développement, sachant que $\sum_{p\geq 0} \dfrac{1}{(2p+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$.

Q-3) On retarde le triangle pair du formulaire d'un quart de période. Que deviennent son spectre d'amplitude et ses phases ? Quelle parité possède le signal obtenu ?

EXERCICE 4 Lire un spectre

Un analyseur de spectre affiche les raies suivantes (amplitudes en volts) ; aucune autre raie n'est visible au-dessus de $0{,}3\,\mathrm{V}$ jusqu'à $2\,\mathrm{kHz}$.

Fréquence (Hz)	0	200	600	1000	1400
Amplitude (V)	1,00	2,00	0,67	0,40	0,29

Q-1) Donner la période du signal et sa valeur moyenne.

Q-2) Identifier la forme du signal et son amplitude crête à crête.

Q-3) Calculer sa valeur efficace vraie. Que mesure un voltmètre TRMS en position AC ?

EXERCICE 5 Calcul direct : signal rectangulaire

On considère le signal rectangulaire valant E pour $0 < t < \alpha T$ et 0 pour $\alpha T < t < T$.

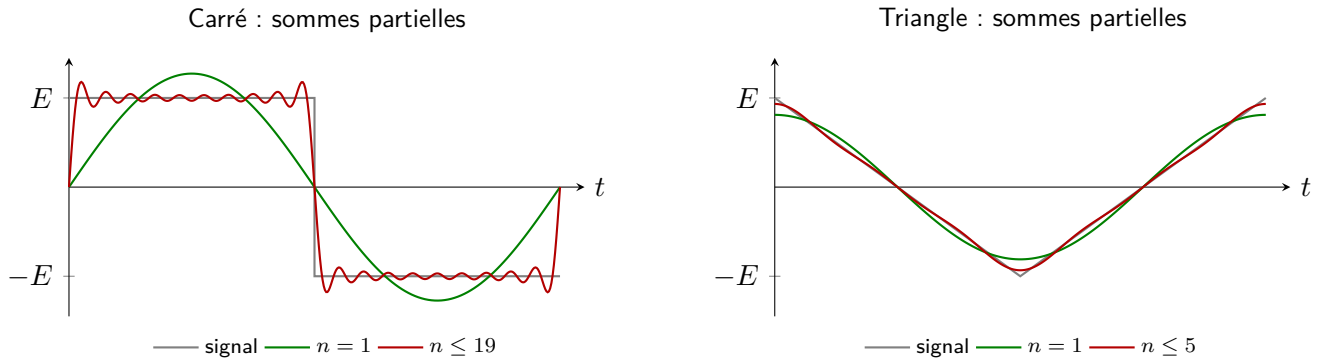
Q-1) Calculer a_0, a_n et b_n, puis montrer que $S_n = \dfrac{2E}{n\pi}|\sin(n\pi\alpha)|$.

Q-2) Quels harmoniques sont absents pour $\alpha = 1/3$? Donner les amplitudes des quatre premières raies non nulles pour $E = 3\,\mathrm{V}$.

III Rôle des harmoniques dans la forme du signal

III.1 Synthèse de Fourier

Ajouter les raies une à une reconstruit progressivement le signal : c'est la **synthèse de Fourier**, que montre la simulation « Synthèse de Fourier ».



Rôle des harmoniques R

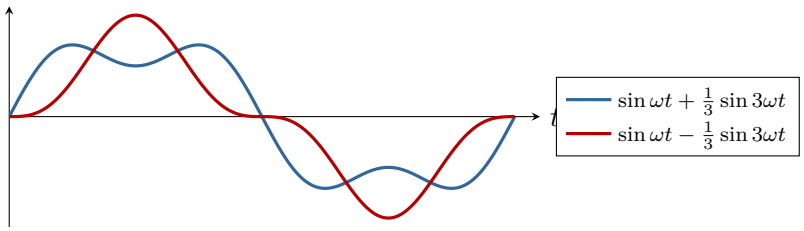
- La composante continue fixe le **niveau moyen** ; le fondamental donne la **période** et l'**allure générale**.
- Les harmoniques de rang élevé codent les **variations rapides** : fronts raides, angles, discontinuités, détails.
- Plus un signal est régulier, plus son spectre décroît vite : amplitudes en $1/n$ pour un signal **discontinu** (carré, dents de scie), en $1/n^2$ pour un signal **continu à dérivée discontinue** (triangle), et une seule raie pour la sinusoïde.

Remarque

Phénomène de Gibbs. Au voisinage d'une discontinuité, la somme partielle présente des oscillations dont le premier dépassement ne diminue pas quand on ajoute des termes : il vaut environ $9\,\%$ du saut (ici $0{,}18E$ pour un saut de $2E$) et se resserre simplement contre le front. Le triangle, continu, n'en présente pas : avec trois raies, l'écart ne dépasse déjà plus $7\,\%$ de E, et seulement aux sommets anguleux.

III.2 Rôle des phases

Le spectre d'amplitude ne suffit pas à reconstituer la forme d'un signal : les **phases** des harmoniques comptent aussi. Les deux signaux ci-dessous ont exactement le même spectre d'amplitude (raies 1 et $1/3$ aux rangs 1 et 3) mais l'harmonique 3 y est déphasée de π.



Le premier signal s'aplatit (il ressemble à un carré), le second s'effile (il ressemble à un triangle). L'oreille, elle, est surtout sensible au spectre d'amplitude : c'est lui qui définit le **timbre** d'un son musical.

III.3 Largeur spectrale et ordres de grandeur

Un front de durée τ fait intervenir des harmoniques jusqu'à une fréquence de l'ordre de $1/\tau$: **plus un signal varie vite, plus son spectre est large**. Cette relation $\Delta t \cdot \Delta f \sim 1$ est générale ; on la retrouvera en optique (temps de cohérence) et en mécanique quantique (inégalité de Heisenberg).

Ordres de grandeur

Tension du secteur (Maroc, Europe)	fondamental $50\,\mathrm{Hz}$; harmoniques 150, 250, $350\,\mathrm{Hz}$ dues aux charges non linéaires
Voix au téléphone	bande utile $300\,\mathrm{Hz}$ à $3{,}4\,\mathrm{kHz}$
Son audible, musique (haute fidélité)	$20\,\mathrm{Hz}$ à $20\,\mathrm{kHz}$
La$_3$ du diapason	$440\,\mathrm{Hz}$; une flûte en émet surtout le fondamental, un violon de nombreux harmoniques
Horloge d'un microprocesseur	quelques GHz ; fronts de quelques dizaines de ps

☞ **Exercices d'application**

EXERCICE 6 **Transmettre un carré et un triangle** ✦✦✧✧✧

Un canal de transmission laisse passer sans les modifier toutes les fréquences inférieures à $8\,\mathrm{kHz}$ et supprime toutes les autres. On y envoie successivement un carré $\pm E$ puis un triangle $\pm E$, de fréquence $1\,\mathrm{kHz}$.

Q-1) Quelles raies sont transmises ?

Q-2) Quelle fraction de la puissance moyenne (de $\langle s^2 \rangle$) est transmise dans chaque cas ?

Q-3) Décrire qualitativement la forme des signaux reçus.

IV Valeur efficace et formule de Parseval

IV.1 Formule de Parseval

Formule de Parseval R D

$$S_{\text{eff}}^2 = \langle s^2 \rangle = S_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S_n^2}{2} = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

Le carré de la valeur efficace (la puissance moyenne, à un facteur $1/R$ près) est la **somme des contributions de chaque raie**.

Démonstration. On élève au carré le développement $s = S_0 + \sum S_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ et on prend la moyenne. Celle des doubles produits $2S_0 S_n \cos(\ldots)$ est nulle ; celle des produits croisés aussi : pour $n \neq m$, le produit de $\cos(n\omega t + \varphi_n)$ par $\cos(m\omega t + \varphi_m)$ se linéarise en cosinus de pulsations $(n \pm m)\omega \neq 0$. Il reste S_0^2 et les termes carrés de moyenne $S_n^2/2$.

Définition — Taux de distorsion harmonique

Pour caractériser l'écart d'un signal de moyenne nulle à une sinusoïde, on compare la puissance des

harmoniques à celle du fondamental :

$$\mathrm{THD} = \frac{\sqrt{\sum_{n\geq 2} S_n^2}}{S_1} = \sqrt{\frac{2\,\tilde{S}_{\text{eff}}^2}{S_1^2} - 1}$$

Une sinusoïde pure a un THD nul ; un amplificateur audio de qualité a un THD inférieur à $0{,}1\,\%$.

Ordres de grandeur

Fraction de la puissance portée par le fondamental : $8/\pi^2 \approx 81\,\%$ pour le carré, $96/\pi^4 \approx 98{,}6\,\%$ pour le triangle. Taux de distorsion : $48\,\%$ pour le carré, $12\,\%$ pour le triangle (exercice ci-dessous).

☞ Exercices d'application

EXERCICE 7 — **Parseval, séries numériques et distorsion** ✦✦✧✧✧

Q-1) Appliquer la formule de Parseval au carré $\pm E$ pour retrouver $\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. En déduire $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Q-2) Faire de même avec le triangle pour obtenir $\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^4}$.

Q-3) Calculer le taux de distorsion harmonique du carré et du triangle.

Q-4) Un carré $\pm 10\,\mathrm{V}$ alimente un résistor de $10\,\Omega$. Quelle puissance moyenne reçoit-il ? Quelle part provient du fondamental ?

V Analyse spectrale en pratique

V.1 Obtenir le spectre d'un signal

Les oscilloscopes numériques et les logiciels d'acquisition calculent le spectre d'un signal enregistré par un algorithme de **transformée de Fourier rapide** (FFT). Le signal étant échantillonné, ce calcul n'a de sens que si la fréquence d'échantillonnage et la durée d'acquisition sont bien choisies (condition de Nyquist-Shannon, résolution spectrale) : ces points sont étudiés au chapitre **E3**. Le spectre est souvent affiché en **décibels** ($20\log(S_n/S_{\text{réf}})$), ce qui rend visibles des raies très faibles à côté du fondamental.

V.2 Activité numérique : calculer et synthétiser

Python : coefficients de Fourier et synthèse d'un créneau

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T, E, N = 1.0, 1.0, 4000                    # periode, amplitude, points
t = np.linspace(0, T, N, endpoint=False)
s = np.where(t < T/2, E, -E)                 # creneau impair +-E
w = 2*np.pi/T

def coeffs(n):                               # a_n et b_n (moyennes discretes)
    return 2*np.mean(s*np.cos(n*w*t)), 2*np.mean(s*np.sin(n*w*t))
```

```
for n in range(1, 8):                          # comparaison avec 4E/(n pi)
    a, b = coeffs(n)
    print(n, round(np.hypot(a, b), 4), round(4*E/(n*np.pi)*(n % 2), 4))

synth = np.mean(s)*np.ones_like(t)             # synthese avec 39 termes
for n in range(1, 40):
    a, b = coeffs(n)
    synth += a*np.cos(n*w*t) + b*np.sin(n*w*t)
plt.plot(t, s, label="signal"); plt.plot(t, synth, label="synthese")
plt.legend(); plt.show()
```

Pistes : remplacer le créneau par un triangle ou un rectangle de rapport cyclique α ; vérifier numériquement la formule de Parseval ; mesurer le dépassement de Gibbs en fonction du nombre de termes.

VI Synthèse

★ À retenir

- $\langle s\rangle = \frac{1}{T}\int_T s\,\mathrm{d}t$; $S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2\rangle}$; $S_{\text{eff}}^2 = \langle s\rangle^2 + \tilde{S}_{\text{eff}}^2$ (DC, AC, AC+DC).
- Sinusoïde : $E/\sqrt{2}$; carré $\pm E$: E ; triangle $\pm E$: $E/\sqrt{3}$; rectangle $0/E$: moyenne αE, efficace $E\sqrt{\alpha}$.
- Fourier : $s = S_0 + \sum S_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$; $a_0 = \langle s\rangle$, $a_n = 2\langle s\cos n\omega t\rangle$, $b_n = 2\langle s \sin n\omega t\rangle$.
- Pair : cosinus seuls ; impair : sinus seuls ; $s(t+T/2) = -s(t)$: rangs impairs seuls. Un retard ne change que les phases.
- Carré : $\frac{4E}{\pi}\sum \frac{\sin n\omega t}{n}$ (n impair) ; triangle : $\frac{8E}{\pi^2}\sum \frac{\cos n\omega t}{n^2}$ (n impair).
- Fondamental : allure ; harmoniques élevés : fronts et détails ; discontinuité $\Rightarrow 1/n$, angle $\Rightarrow 1/n^2$.
- Parseval : $S_{\text{eff}}^2 = S_0^2 + \sum S_n^2/2$; THD $= \sqrt{\sum_{n\geq 2} S_n^2}/S_1$.

✗ Attention, erreurs fréquentes

Erreurs classiques : diviser l'amplitude par $\sqrt{2}$ pour un signal non sinusoïdal ; oublier la composante continue dans la valeur efficace vraie ; ajouter des valeurs efficaces au lieu de leurs carrés ; confondre rang de l'harmonique et fréquence (l'harmonique 3 d'un signal à $50\,\mathrm{Hz}$ est à $150\,\mathrm{Hz}$) ; croire que le spectre d'amplitude suffit à reconstituer la forme d'un signal.

VII Exercices d'approfondissement

EXERCICE 8 Redressement double alternance

Un pont de diodes transforme la tension du secteur $U\cos(\omega_0 t)$, de fréquence $f_0 = 50\,\text{Hz}$, en $u(t) = U|\cos(\omega_0 t)|$, avec $U = 325\,\text{V}$.

Q-1) Quelle est la période de u ? la fréquence de son fondamental ?

Q-2) Calculer $\langle u \rangle$ et U_{eff}.

Q-3) On donne $|\cos x| = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k\geq 1} \dfrac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos(2kx)$. Donner les amplitudes et les fréquences des trois premières raies non nulles.

Q-4) Quelle fraction de $\langle u^2 \rangle$ est portée par la composante continue ? Pourquoi faut-il ensuite filtrer pour obtenir une tension continue ?

EXERCICE 9 Dents de scie et phénomène de Gibbs

Le signal en dents de scie vaut $s(t) = \dfrac{2E}{T}t$ pour $-T/2 < t < T/2$, prolongé par périodicité.

Q-1) Justifier que $a_n = 0$, puis montrer par une intégration par parties que $b_n = \dfrac{2E}{\pi}\cdot\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Q-2) Calculer S_{eff} directement, puis retrouver $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ par la formule de Parseval.

Q-3) Que vaut la somme de la série en $t = T/2$? Commenter.

Q-4) Les signaux carré et dents de scie ont tous deux des raies en $1/n$: quel point commun de leurs formes temporelles l'explique ?

EXERCICE 10 Des impulsions étroites au peigne de raies

Un générateur délivre des impulsions rectangulaires d'amplitude E, de durée $\tau = \alpha T$, centrées sur les instants kT.

Q-1) À l'aide du formulaire (rectangulaire de rapport cyclique α), montrer que $S_n = 2\alpha E\left|\dfrac{\sin(n\pi\alpha)}{n\pi\alpha}\right|$.

Q-2) Pour $T = 1\,\text{ms}$ et $\tau = 50\,\mu\text{s}$, à quelle fréquence le spectre s'annule-t-il pour la première fois ? Combien de raies se trouvent avant ?

Q-3) On fait tendre τ vers 0 en gardant l'aire $E\tau$ constante. Que devient le spectre ? Ce résultat sera utilisé pour l'échantillonnage (**E3**).

EXERCICE 11 Tension du secteur déformée

La tension délivrée dans un atelier comportant de nombreux redresseurs s'écrit $u(t) = U_1\cos(\omega t) + U_3\cos(3\omega t) + U_5\cos(5\omega t)$ avec $f = 50\,\text{Hz}$, $U_1 = 325\,\text{V}$, $U_3 = 30\,\text{V}$ et $U_5 = 15\,\text{V}$.

Q-1) Tracer le spectre d'amplitude (fréquences et amplitudes des raies).

Q-2) Calculer la valeur efficace vraie de u et son taux de distorsion harmonique.

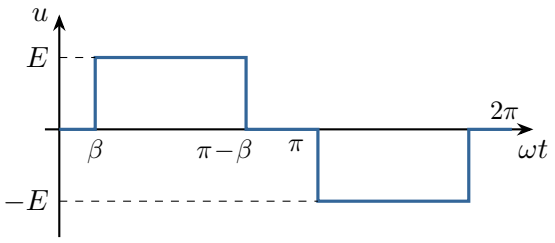
Q-3) Quelle est la valeur crête de u ? Un appareil qui mesure la valeur crête et la divise par $\sqrt{2}$ indique-t-il la bonne valeur efficace ?

VIII Classiques des concours

EXERCICE 12 Onduleur à commande décalée

★★★☆☆

Un onduleur délivre à un moteur la tension $u(t)$ ci-contre, de période T : $u = +E$ pour $\beta < \omega t < \pi - \beta$, $u = -E$ pour $\pi+\beta < \omega t < 2\pi-\beta$, et $u = 0$ ailleurs $(0 < \beta < \pi/2)$.



Q-1) Quelles symétries possède u ? Quels coefficients sont nuls ?

Q-2) Montrer que, pour n impair, $b_n = \dfrac{4E}{n\pi}\cos(n\beta)$.

Q-3) Quelle valeur de β supprime l'harmonique 3 ? Montrer qu'elle supprime alors tous les harmoniques multiples de 3.

Q-4) Pour cette valeur, calculer U_{eff}, l'amplitude du fondamental et le taux de distorsion harmonique. Comparer au carré $(\beta = 0)$.

EXERCICE 13 Identifier un signal par son spectre

★★☆☆☆

L'analyse FFT d'un signal de moyenne nulle montre des raies à toutes les fréquences multiples de $500\,\text{Hz}$, d'amplitudes $S_n = \dfrac{2{,}0\,\text{V}}{n}$, et le spectre de phase indique que le signal est une somme de sinus de signes alternés.

Q-1) Identifier le signal à l'aide du formulaire et donner sa période et sa valeur crête.

Q-2) Calculer sa valeur efficace.

Q-3) Quelle fraction de $\langle s^2 \rangle$ portent les trois premières raies ?

Q-4) Le même spectre d'amplitude, mais avec toutes les phases nulles (somme de cosinus de même signe), donnerait-il le même signal ? Le même son ?

EXERCICE 14 Spectre d'une tension de commande MLI simplifiée

★★★☆☆

Une tension rectangulaire u de fréquence $f = 20\,\text{kHz}$ vaut $E = 12\,\text{V}$ pendant αT et 0 sinon ; elle alimente un moteur à courant continu dont seule la valeur moyenne de la tension compte.

Q-1) Exprimer la tension moyenne en fonction de α. Quel rapport cyclique donne $9\,\text{V}$?

Q-2) Pour ce rapport cyclique, calculer l'amplitude du fondamental et la valeur efficace de la partie variable.

Q-3) Pourquoi choisit-on une fréquence de $20\,\text{kHz}$ plutôt que $200\,\text{Hz}$?